**Кубанский институт социоэкономики и права
(филиал) Образовательного учреждения профсоюзов
высшего образования
«Академия труда и социальных отношений»**

Н.В. ВАХРУШЕВА

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

**Электронное
учебно-методическое
пособие**

КРАСНОДАР - 2020

УДК 36.6
ББК 22+65
В 22

Рекомендовано к изданию
Учёным советом КубИСЭП (филиала) ОУП ВО «АТиСО»
(протокол № 2 от 26 ноября 2020 года)

Рецензенты:

Н.В. Третьякова *кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики Кубанского государственного аграрного университета И.Т. Трубилина*

Л.В.Куцегреева *кандидат экономических наук доцент кафедры финансов и кредита Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова, Краснодарский филиал*

Вахрушева Н.В.
Финансовая математика: электронное учебно-методическое пособие / Н.В. Вахрушева. – Краснодар: КубИСЭП (филиал) ОУП ВО «АТиСО», 2020. – 81 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов КубИСЭП (филиала) ОУП ВО «АТиСО» направления подготовки 38.03.01 Экономика.

В учебном пособии изложен необходимый теоретический и практический материал по основным темам финансовой математики в условиях определенности, изучаемой дисциплины. Представлены задания для контрольной работы, а также контрольные вопросы и тестовые задания для самоконтроля.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Самые лучшие инвестиции – в знания.

Бенджамин Франклин (18.10.1785 – 05.11.1788) – американский политический деятель, дипломат, изобретатель, писатель, журналист.

Финансовая математика – это прикладная область математики, рассматривающая детерминированные и недетерминированные модели финансово-кредитных операций.

Рамки рассматриваемых вопросов финансовой математики достаточно широки и к основным её задачам относят следующие:

– измерение конечных финансовых результатов операций (сделки, контракта) для каждой из участвующих сторон;

– разработка планов выполнения финансовых операции, в том числе планов погашения задолженности;

– измерение зависимости конечных результатов операций от основных её параметров;

– определение допустимых критических значений этих параметров и расчёт параметров эквивалентного (безубыточного) изменения первоначальных условий операции.

Данный перечень не является исчерпывающим, так как практика финансовых взаимоотношений постоянно ставит новые задачи финансового характера. К числу последних относятся, например, оптимизация портфеля активов, уменьшение рисков в форвардной и фьючерсной торговле. Таким образом, круг вопросов, рассматриваемых средствами финансовой математики, постоянно пополняется. Теоретические основы финансовой математики можно разбить на следующие три части:

– классическую в условиях определённости;

– классическую в условиях неопределённости;

– современную (повышенного уровня).

К первой части – классической в условиях определённости – относятся такие темы финансовой математики как:

1) простые и сложные проценты;

2) ставки и стоимость потоков платежей;

3) фундаментальные принципы;

4) процессы накопления и проведения, интенсивность накопления;

5) классический принцип погашения;

6) показатели эффективности капиталовложений вообще;

7) оценка стоимости, в частности ЦБ.

Ко второй части – классической в условиях неопределённости – относятся следующие темы:

1) риск и доходность актива.

2) теория иммунизации, волатильность и некоторые другие понятия, связанные с доходностью;

3) простейшая теория расчёта стоимости опционов;

4) портфельная теория Марковица;

5) модели ценообразования финансовых активов;

6) простейшие модели изменения случайных процентных ставок;

7) понятия финансового рынка, арбитража, страхования и др.

К третьей части относятся сравнительно недавно разработанные (новые) темы или разрабатываемые сейчас вопросы теории, исследуемые средствами стохастической финансовой математики.

Данное учебное пособие посвящено первой части, в частности, рассматриваются такие вопросы, как: виды процентных ставок (простая, сложная, номинальная, сила роста), наращение процентов, дисконтирование платежей, конверсия валют, финансовая эквивалентность платежей, финансовые потоки платежей, влияние налоговой политики и инфляции при измерении доходности финансовой операции, потребительский кредит и методы его погашения.

Последовательность представления материала в учебно-методическом пособии, позволяющая приобрести обучающимся необходимые компетенции, такова: каждая тема представлена теоретической и практической частью, затем даются контрольные вопросы для самоконтроля степени усвоения материала.

В конце пособия приводится список литературы, в котором студенты смогут найти дополнительные сведения по интересующим вопросам и на основе полученных знаний продолжить самостоятельное их изучение. В приложениях приводится глоссарий основных терминов, образец контрольной работы в 10 вариантах, примерные тестовые задания и криптограммы для самопроверки полученных знаний.

При формировании системы заданий были использованы материалы из учебной литературы, представленной в конце пособия.

Пособие написано в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по направлению подготовки: 38.03.01 Экономика, предназначено для изучения дисциплины «Финансовая математика».

Учебное пособие может быть полезно для практиков – сотрудников банков, финансовых и страховых компаний, инвестиционных и пенсионных фондов и др., изучающих вопросы практического использования современных методов количественного анализа в финансово-кредитных операциях.

Для записи формул примем следующие обозначения:

I – проценты за весь срок ссуды (условные денежные единицы (у.д.е.);

P – первоначальная сумма (у.д.е.);

S – наращенная сумма (у.д.е.);

S_α – наращенная сумма с учетом инфляции (у.д.е.);

i_n – ссудная (простая) процентная ставка (% или десятичная дробь);

i_c – ссудная (сложная) процентная ставка (% или десятичная дробь);

i_α – процентная (простая/сложная) ставка, учитывающая инфляцию (% или десятичная дробь);

j – номинальная процентная ставка (% или десятичная дробь);

δ – сила роста (% или десятичная дробь);

α – уровень (темп) инфляции (% или десятичная дробь);

I_p – индекс роста инфляции (десятичная дробь);

q – ставка налога на проценты (% или десятичная дробь);

d_n – простая учетная ставка (% или десятичная дробь);

d_c – сложная учетная ставка (% или десятичная дробь);

D – дисконт (у.д.е.);

n – срок ссуды (в годах);

t – срок ссуды (в днях);

m – количество начислений процентов в году (число);

K – временная база, равная 360, 365 или 365 дням;

p – величина ежемесячных выплат при погашении кредита (у.д.е.);

R – величина рентного платежа (у.д.е.);

A – современная стоимость ренты (у.д.е.);

K_0 – курс обмена валюты в начале срока (у.д.е.);

K_1 – курс обмена валюты в конце срока (у.д.е.);

a – доходность финансовой операции (% или десятичная дробь).

Рекомендация:

При вычислениях рекомендуется округлять следующим образом: денежные величины до сотых; время, до тысячных, процентные ставки до десятитысячных.

РАЗДЕЛ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

§ 1.1 ССУДНЫЕ ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ

Одним из главных инструментов в финансовых вычислениях является **процент (**от лат. *pro centum* – «на сотню»). Сегодня проценты можно встретить практически в каждой науке, например, в статистике, в химии, биологии и т. д. Но очень долгое время процент применялся только в торговых и денежных сделках для обозначения прибыли или убытка на каждые сто денежных единиц. И если в математике процент определяется как сотая часть числа, то в финансовых вычислениях под процентом (I) мы будем подразумевать **абсолютную** величину дохода (прибыли) от предоставления денег в долг в любой его форме (выдача ссуды, продажа товара в кредит, помещение денег на депозитный счет и т. д.).

Но для того чтобы найти, какой доход будет от предоставления денег в долг, нужно знать процентную ставку – отношение процентов за единицу времени к сумме долга. Причем единицей времени (временной интервал, после которого происходит начисление процентов) может быть год, полгода, квартал, месяц, день. В финансовых операциях очень часто процентная ставка устанавливается как годовая процентная ставка, т. е. начисление процентов происходит по истечении года после заключения договора. Обычно проценты при вычислениях записываются в виде десятичной дроби, например, 12 % соответствуют 0,12. При этом если начисление производится в конце определенного периода процентные ставки называются «ссудные» (часто это слово упускают и произносят вместо ссудная процентная ставка – «процентная ставка»). Метод же начисления по ссудной процентной ставке называется **декурсивный** метод начисления процентов.

В финансовых операциях различают две схемы начисления процентов: по простой процентной ставке и сложной процентной ставке.

Рассмотрим метод начисления процентов по простой процентной ставке.

Простая процентная ставка наращения – ставка, при которой база начисления остается всегда постоянной.

Для наглядности решим следующую задачу.

Гражданин К., чтобы увеличить свой капитал, решил положить 1000 рублей в банк. Банк предлагает простую процентную ставку, равную 8 % годовых. Какую сумму получит клиент банка через три года?

Решение:

Так как процентная ставка простая, то начисление процентов происходит только на начальную сумму, т. е. на 1000 рублей.

Проценты за 1-й год составят $1000 \cdot 0,08 = 80$ (рублей). За 2-й и 3-й год проценты будут также по 80 рублей – согласно определению простой процентной ставки. Следовательно, за три года проценты составят $3 \cdot 80 = 240$ (рублей).

Гражданин К. через три года получит сумму, равную:

$1000 + 240 = 1000 + 1000 \cdot 0,08 \cdot 3 = 1000 \cdot \left(1 + 3 \cdot 0,08\right) = 1240$ (рублей).

Задача решена.

Переведем последнее выражение на математический язык, введя условные обозначения. Начальную сумму примем за P, простую процентную ставку – $i_п$ %, конечную (наращенную) сумму – S, продолжительность периода начисления в годах – n. Тогда наше числовое выражение примет вид

$$P + P \cdot i_п \cdot n = P(1 + 1 \cdot i_п \cdot n) = S \qquad (1).$$

Полученная формула $\quad S = P(1 + i_п \cdot n) \qquad (1)$

называется *формулой наращения суммы по простым процентам.*

Зная любые три параметра, из формулы (1) можно всегда с помощью математических преобразований найти четвертый параметр. Например, если известны срок финансовой операции, начальная и конечная сумма, то можно найти процентную ставку, которую в этом случае называют *доходностью ссудной операции*. Если необходимо найти первоначальную сумму, то такая операция в финансовой практике называется *математическим дисконтированием*.

Обратим внимание на второе слагаемое в выражении (1), его обозначают через I, т. е. $I = P \cdot i_п \cdot n$, и называют *процентом* или *доходом* от предоставления капитала в долг за весь срок операции.

Вернемся к нашей задаче и зададим следующий вопрос. Какую сумму клиент банка смог бы забрать в конце 1, 2, 3-го года?

Так как за каждый год процентный доход равен 80 рублям, то в конце первого года, второго, третьего клиент банка смог бы забрать соответственно 1080, 1160, 1240 рублей.

Можно заметить, что числовая последовательность, составленная из первоначальной суммы и наращенных сумм после первого, второго, третьего года и т. д. (1000; 1080; 1160;…) образуют арифметическую прогрессию, первый член которой равен первоначальной сумме $a_0 = P$, а разность арифметической прогрессии равна процентному доходу за год $d = Pi_п$. Отсюда можно сделать вывод: наращение суммы по простой процентной ставке происходит по правилу *арифметической прогрессии*. То есть, зависимость наращённой суммы от времени при фиксированной процентной ставке и первоначальной сумме является линейной (рис.1.).

Нужно отметить, что размерности величин, определяющие процентный платеж (I), должны быть согласованы, т. е. если срок финансовой операции измеряется в годах, то процентная ставка должна быть годовой. Если срок измеряется в месяцах, то и ставка процента должна отражать рост за новую единицу времени, а именно за месяц. На практике делают следующим образом: если объявлена годовая процентная ставка, а срок финансовой операции меньше года, то определяют, какую часть года составляет данный срок, т. е.:

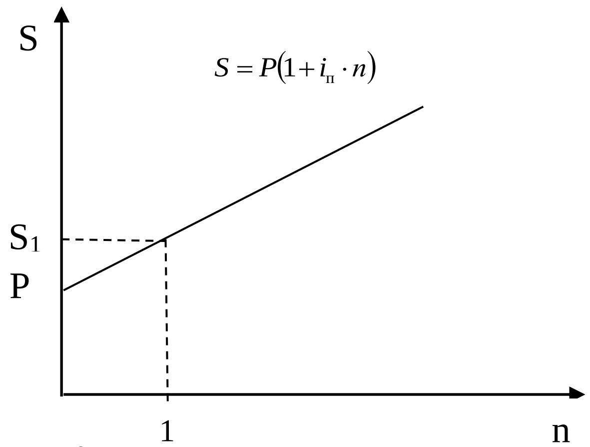


Рис.2 Наращение по простой процентной ставке

$n = \dfrac{t}{K}$, где t – количество дней, а K – временная база.

Тогда формула (1) принимает следующий вид:

$$S = P\left(1 + \frac{t}{K} \cdot i_п\right) \qquad (2).$$

В финансовых операциях различают две временные базы: K = 360 дней (приближенное число дней в году, считают, что в каждом месяце 30 дней) или K = 365 или 366 дней (точное число дней в году).

Если K = 360, то получают *обыкновенные,* или *коммерческие* проценты, а при использовании действительной продолжительности года (365, 366 дней) рассчитывают *точные* проценты.

На практике применяются три варианта расчета простых процентов.

1. *Точные проценты с точным числом дней ссуды.* Этот вариант дает самые точные результаты. Применяется центральными банками многих стран и крупными коммерческими банками, например, в Великобритании, США. В коммерческих документах он обозначается как $^{365}/_{365}$ или $^{ACT}/_{ACT}$, где АСТ представляет собой начало слова *actual*, что означает *действительный* («английская практика»).

2. *Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды* – метод, иногда называемый *банковским*, распространен в международных ссудных операциях коммерческих банков. Применяется во Франции, Бельгии, Швейцарии. Обозначается, как $^{365}/_{360}$ или $^{ACT}/_{360}$ («французская практика»).

3. *Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.* Число дней в месяце считается равным 30. Такой метод применяется, когда не

требуется большой точности, например, при промежуточных расчетах. Принят в практике коммерческих банков Германии, Швеции, Дании. Обозначается как $^{360}\!/_{360}$ («германская практика»).

При определении числа дней ссуды по календарю первый день не учитывается, а последний учитывается.

Для удобства подсчета дней пользуются сквозной нумерацией всех дней в году (см. приложение 1). Если год високосный, то после 28 февраля к порядковым номерам дней в году нужно прибавлять единицу.

Пример 1.1. Для расчета по английской (германской) практике определить число дней с 03.02.2019 по 24.05.2019.

Решение:

Для расчета по английской практике требуется точное количество дней. Найдем их по приложению 1. Порядковый номер 03.02.2019 (3 февраля) соответствует 34, порядковый номер 24.05.2019 (24 мая) – 144. Точное число дней:

t = 144 – 34 = 110 дн.

Для расчета по германской практике количество дней приближенное, считается в каждом месяце равным 30, продолжительность года – 360 дней. Тогда в феврале – 30 – 3 = 27 дней, в марте, апреле – 30 × 2 = 60 дней, в мае – 24 дня. В результате получаем 27 + 60 + 24 = 111 дн.

Отметим, что в финансовых соглашениях процентные ставки не всегда могут быть постоянными, они могут изменяться в течение срока договора. Пусть на некоторые определенные интервалы времени n_1, n_2, …, n_k применяются простые процентные ставки $i_{п1}, i_{п2}, ..., i_{пk}$ соответственно. Тогда наращенная сумма вычисляется по формуле:

$$S = P(1 + n_1 i_{п1} + n_2 i_{п2} + ... + n_k i_{пk}) = P(1 + \sum_{j=1}^{k} n_j i_{пj}).$$

Если же процентный платеж в каждом расчетном периоде добавляется к наращенной сумме предыдущего периода, а начисление процентов в последующем периоде производится уже на эту величину, то наращение осуществляется по сложной процентной ставке.

Сложная процентная ставка наращения – это ставка, при которой база начисления является переменной, т. е. проценты начисляются на проценты.

Присоединение начисленных процентов к сумме, которая послужила базой для их начисления, часто называют *капитализацией* или *реинвестированием* процентов.

Наращенную сумму по сложной процентной ставке находят по формуле:

$$S_n = P\left(1+i_c\right)^n \qquad (5).$$

Как видно из формулы (5) зависимость наращенной суммы от времени при фиксированной первоначальной сумме и процентной ставке представляют собой показательную функцию. Давайте рассмотрим графически, как изменяется наращение по сложной процентной ставке в течение времени и сравним ее с наращенной суммой по простой ссудной ставке (рис. 2). При этом учитывая что первоначальная сумма одинакова, и $i_п = i_с$.

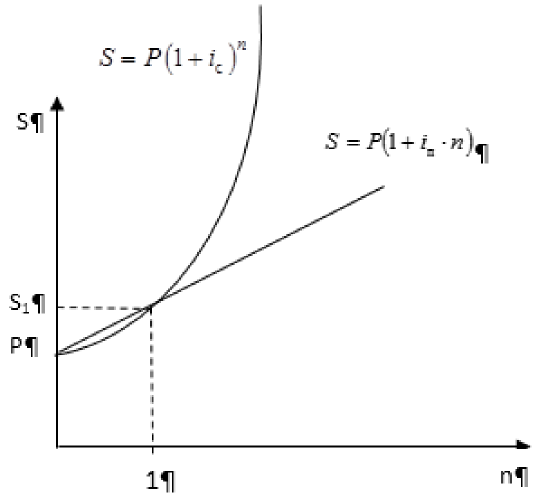


Рис.2 Наращение по сложной и простой процентных ставках

Как видно из графика наращенная сумма по сложной процентной ставке ниже чем по простой процентной ставке, при $n = 1$ они совпадают, а вот при $n > 1$ наращенная сумма по сложной процентной ставке стремительно возрастает и на много отличается от наращенной суммы по простой процентной ставке за тот же самый период . Таким образом, можно сделать вывод: что при финансовых операциях, период которых меньше года, выгоднее воспользоваться простой процентной ставкой, при $n = 1$ – процентные ставки равносильны, при $n > 1$ – сложной. Однако, стоит отметить, что если период финансовой операции длительный, то сложная процентная ставка будет давать слишком большую величину наращенной суммы, что теряет смысл в ее выгодности, как для ссуд, так и для кредитов. Поэтому, например, при ипотечном кредитовании (о чем мы поговорим более подробно далее) сложную процентную ставку не используют.

Нужно отметить, что временной интервал финансовой операции не всегда является целым числом. В этом случае наращенную сумму по схеме сложных процентов можно найти двумя способами:

1) точное вычисление – $S = P(1+i_c)^{n_a}(1+i_C)^{n_b}$, где n_a– целое число лет, n_b– дробная часть года;
2) приближенное вычисление – $S \approx P(1+i_c)^{n_a}(1+n_b i_c)$.

И так как сложную процентную ставку чаще всего применяют в долгосрочных операциях то со временем ставка может измениться. Пусть на некоторых интервалах начисления (в годах) n_1, n_2 , …, n_k применяются сложные процентные ставки i_{c1} , i_{c2} ,…, i_{ck} соответственно. Тогда наращенную сумму находят по формуле:

$$S = P(1+i_{c1})^{n_1}(1+i_{c2})^{n_2}...(1+i_{ck})^{n_k} = P\prod_{j=1}^{k}(1+i_{cj})^{n_j} \qquad (6).$$

Капитализация сложных процентов может происходить не только один, но и несколько раз в год – по полугодиям, поквартально, ежемесячно, ежедневно. В этом случае применяется номинальная процентная ставка – *j*. Тогда наращенная сумма находится по формуле:

$$S = P(1+{}^{j}\!/\!_{m})^{mn} \qquad (7),$$

где m – количество начислений процентов в году, например, если начисление процентов происходит каждые полгода, то $m = 2$.

Если начисление процентов происходит непрерывно, то для нахождения наращенной суммы используют следующую формулу:

$$S = Pe^{nj} \qquad (8).$$

Формула (8) получена из формулы (7) при $m \to \infty$, используя второй замечательный предел:

$$S = \lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = P\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{{}^{m}\!/\!_{j}}\right)^{nj\cdot\frac{m}{j}} = Pe^{nj}.$$

Суть непрерывных процентов заключается в том, что количество периодов наращения или дисконтирования стремится к бесконечности, а временной интервал между периодами – к нулю. Непрерывные проценты используются как один из критериев при обосновании и выборе наилучшего инвестиционного проекта.

Контрольные вопросы

1. Основные понятия финансовой математики (проценты, процентная ставка, первоначальная и наращенная суммы, период начисления, интервал начисления).
2. Декурсивный способ начисления процентов.
3. Простые ставки ссудных процентов. Нахождение наращенной суммы. Математическое дисконтирование.
4. Сложные ставки ссудных процентов. Нахождение наращенной суммы. Математическое дисконтирование.
5. Английская, германская, французская практики начисления процентов.
6. Какая функция описывает зависимость наращенной суммы от времени при фиксированных первоначальной сумме и простой ссудной ставки?
7. Какая функция описывает зависимость наращенной суммы от времени при фиксированных первоначальной сумме и сложной ссудной ставки?

8. Нахождение наращенной суммы при изменении ссудной процентной ставки в течение срока операции.
9. Начисление сложных процентов несколько раз в году. Номинальная процентная ставка.
10. В каких случаях используют силу роста процентов?

§ 1.2 УЧЕТНЫЕ ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ

Если проценты, например, за кредит или любую другую инвестицию, выплачиваются (начисляются) в момент заключения договора, то такой метод начисления процентов называют антисипативным (или предварительным).

Антисипативная процентная ставка называется *учетной процентной ставкой* и обозначается буквой d. Также как и ссудные процентные ставки, учетные процентные ставки могут быть простыми и сложными.

На практике учетные ставки применяют, например, при учете (покупке) векселей. Вексель, согласно международному вексельному законодательству, является особым видом письменного обязательства, дающего право его владельцу требовать в установленный срок, называемый сроком погашения, выплатить определенную сумму, называемую суммой погашения. Обязательное условие для любого векселя состоит в том, что текст в нем должен быть составлен так, чтобы на его основании можно было точно определить дату и сумму погашения (номинальная стоимость векселя).

Вексель может оформляться по-разному, однако чаще всего банку приходится иметь дело с учетом векселей. Суть операции заключается в следующем. Банк до наступления срока погашения векселя приобретает его у владельца по цене, которая меньше номинальной стоимости векселя. В этом случае векселедержатель получает сумму, равную $P = S - D$. В данном случае P является *современной стоимостью* будущего платежа S.Такая операция называется дисконтированием по простой учетной ставке (банковским учетом). D – дисконт, который показывает величину удержанных процентов, начисленных за время n от дня дисконтирования до дня погашения векселя на сумму S, подлежащую уплате в конце срока. Таким образом, дисконт равен $D = Snd_{\text{п}}$.

Тогда владелец векселя получит:

$$P = S - Snd_{\text{п}} = S(1 - nd_{\text{п}}) \qquad (9).$$

Формулу (9) используют, если срок погашения измеряется в годах. Или

$$P = S\left(1 - \frac{t}{K} d_{\text{п}}\right) \qquad (10).$$

Формулу (10) используют, если срок погашения измеряется в днях.

Полученные формулы часто называют *банковским (коммерческим) дисконтированием*. Обычно при расчетах пользуются французской практикой.

Зная любые три параметра, из формул (9), (10) можно всегда с помощью математических преобразований найти четвертый параметр.

Пример:

Вексель с датой погашения 23 мая был учтен банком 11 января этого же года по простой учетной ставке 13 % годовых. Банк выплатил 18 000 рублей. Вычислить номинальную стоимость векселя.

Дано:

t_1 – 23 мая

t_2 – 11 января

$d_п = 13\%$

$P = 18000$ руб.

Найти S

Решение:

$t = t_1 - t_2$, $t_1 = 143$, $t_2 = 11$ (см. приложение 1)

$t = 143 - 11 = 132$ дня – количество дней, оставшихся до даты погашения,

К = 360, Р = 18000, d = 0,13.

Выразив из формулы (10) наращенную сумму *S*, имеем:

$$S = \frac{P}{1 - t/K \cdot d_п} = \frac{18000}{1 - 132/360 \cdot 0{,}13} = 18900{,}95 \text{ рубля.}$$

Ответ: Номинальная стоимость векселя 18 900,95 рубля.

При дисконтировании по сложной учетной ставке используют следующую формулу:

$$P = S(1 - d_c)^n \qquad (11),$$

где множитель $(1 - d_c)^n$ называется *дисконтным множителем*.

В этом случае дисконт D (величина удержанных процентов) находят по формуле:

$$D = S - P = S - S(1-d)^n = S(1 - (1-d)^n) \qquad (12).$$

Если дисконтирование осуществляется не за целое число лет, то для нахождения современной стоимости применяется один из способов:

1) точное вычисление – $P = S(1-d)^{n_a}(1-d)^{n_b}$, где n_a – целое число лет, n_b – дробная часть года;
2) приближенное вычисление – $P \approx S(1-d)^{n_a}(1 - n_b d)$.

Если начисление по сложной учетной ставке происходит m раз в году, то для дисконтирования по учетной сложной ставке пользуются формулой:

$$P = S\left(1 - \frac{j}{m}\right)^{mn} \qquad (13).$$

Контрольные вопросы

1. Антисипативный способ начисления процентов, учетная ставка.
2. Простые учетные ставки. Дисконт. Банковский учет.
3. Сложные учетные ставки. Дискотный множитель.
4. Привести примеры финансовых операций, когда применяются учетная ставка.
5. По какой практике чаще всего происходит банковское дисконтирование,

§ 1.3 СРАВНЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Часто перед инвесторами стоит выбор, какой вариант наращения лучше выбрать для получения максимальной прибыли, то есть максимального наращения первоначальной суммы. В связи с чем, возникает задача сравнения между собой различных видов процентных и учетных ставок.

На практике поступают следующим образом. Если сравниваются две ставки разных видов, то для одной из них находят эквивалентную ей ставку из другого класса и проводят сравнение двух ставок из одного класса.

Введем понятие эквивалентности ставок.

Две ставки называются *эквивалентными,* если при одинаковой первоначальной сумме P и на одинаковом сроке начисления n они приводят к одинаковой наращенной сумме S.

Рассмотрим нахождение эквивалентности для различных видов ставок.

1. Эквивалентная простая ставка для простой учетной ставки

Наращенная сумма при использовании простой процентной ставки равна

$S_1 = P(1+ ni_п)$,

при использовании учетной ставки

$S_2 = P/(1- nd_п)$.

Так как ставки эквивалентны, то $S_1 = S_2$, т. е.

$$P(1+ni_п) = \frac{P}{1-nd_п}$$

выразим $i_п$ через $d_п$:

$$1+ni_п = \frac{P}{P(1-nd_п)};$$

$$1+ni_п = \frac{1}{1-nd_п};$$

$$ni_п = \frac{1}{1-nd_п} - 1;$$

$$ni_п = \frac{1 - 1 + nd_п}{1 - nd_п};$$

$$ni_п = \frac{nd_п}{1 - nd_п};$$

$$i_п = \frac{nd_п}{n(1 - nd_п)};$$

$$i_п = \frac{d_п}{1 - nd_п},$$

Последнее равенство показывает эквивалентность простой ставки для простой учетной ставки.

Если бы мы выразили простую учетную ставку через простую процентную ставку, проведя ряд тождественных преобразований, то получили бы эквивалентную **простую учетную ставку для простой процентной ставки**, имеющую вид:

$$d_n = \frac{i_n}{1 + ni_п}.$$

2. Эквивалентная сложная процентная ставка для номинальной сложной процентной ставки

Наращенная сумма при использовании сложной процентной ставки равна:

$$S_1 = P(1 + i_c)^n.$$

Наращенная сумма при использовании номинальной процентной ставки равна:

$$S_2 = P(1 + j/m)^{mn},$$

Тогда, если $S_1 = S_2$, имеем:

$$P(1 + i_c)^n = P(1 + \frac{j}{m})^{mn};$$

$$(1 + i_c)^n = \frac{P(1 + j/m)^{mn}}{P};$$

$$1 + i_c = \sqrt[n]{(1 + j/m)^{mn}};$$

$$i_c = (1 + \frac{j}{m})^m - 1 \qquad (14).$$

Формула (14) определяет **эффективную годовую ставку** сложных процентов, она эквивалентна номинальной сложной процентной ставке и не зависит от периода начисления. Это означает, что при замене в договоре номинальной ставки j при m-разовом начислении на эффективную годовую ставку i_c финансовые обязательства участников сторон не изменятся. Так.

например, если кредит на сумму 100000 рублей, был взят под 24% годовых с ежемесячным начислением процентов и ежемесячными выплатами, то переплата по нему будет не 24000 руб., как это может подумать среднестатистический человек, а 26824 руб., т.к. эффективная годовая ставка для номинальной ставки в 24% равна 26,8242% или если округлить до сотых 26,82% (проверьте расчеты самостоятельно, подставив в формулу 14 вместо j =0,24, а m = 12).

Замечание: аналогично проведенным выше рассуждениям можно получить эквивалентные ставки для различных видов ссудных и учетных ставок.

Пример:

Банк выдал кредит по номинальной процентной ставке 23% с ежемесячным начислением сроком на 3 года. Найти эффективную процентную ставку.

Дано:

$j = 0{,}23$

$m = 12$

$n = 3$

Найти i_c

Решение:

Воспользуемся формулой 14. Имеем

$$i_c = (1+\frac{j}{m})^m - 1 = (1+\frac{0,23}{12})^{12} - 1 = 0,2559$$, т.е. если бы начисления процентов по кредиту осуществлялись раз в год, то процентная ставка кредита составляла 25,59%.

Ответ: эффективная процентная ставка равна 25,59%.

Контрольные вопросы:

1. Дать определение эквивалентной процентной ставки.
2. Как находят эквивалентные процентные ставки. Проиллюстрировать примером.
3. Формула эффективной процентной ставки. Что показывает эффективная процентная ставка?
4. В каких случаях нужно воспользоваться эквивалентными ставками? Привести конкретные примеры.
5. Пусть величина простой процентной ставки равна величине сложной процентной ставке. При каких условиях они будут эквивалентны?

§ 1.4 МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ

В практической жизни мы часто встречаемся с потоками платежей – например, заработная плата, стипендия, оплата за обучения, квартплата, погашение кредита и т. п.

В финансовой практике *поток платежей* определяется как последовательность величин самих платежей (со знаками) и моментов времени, когда они осуществлены.

Платеж со знаком плюс – это поступление, со знаком минус – выплаты.

Поток положительных платежей с равными интервалами между последовательными равными платежами в течение определенного срока называется ***финансовой рентой*** (**аннуитет**).

Существуют различные виды финансовых рент, зависящие от:

- *моментов платежа и начисления процентов*: **постнумерандо** – все платежи осуществляются в конце интервалов ренты, и проценты начисляются по декурсивному методу, **пренумерандо** – все платежи осуществляются в начале интервалов ренты, и проценты начисляются по антисипативному методу;
- *количества платежей в год*: **дискретные** – число платежей определено, различаются на годовые (один платеж в год) и p-срочные (p платежей в год), **непрерывные** – число платежей в году стремится к бесконечности;
- *величины платежа*: **постоянные** – все платежи равны между собой, **переменные** – величина платежа изменяется, как правило, закономерно;
- *количества всех платежей*: **верные** – количество платежей определено, **условные** – количество платежей неизвестно и зависит от наступления какого-либо события, оговоренного в договоре;
- *срока ренты:* **ограниченные** – известен срок окончания операции, **вечные** – срок операции продолжительный и дата окончания неизвестна.

Финансовые ренты характеризуются следующими параметрами:

R – величина годового платежа ренты;

n – срок ренты – от начала реализации ренты до момента последнего платежа;

i – процентная ставка;

p – число рентных платежей в году;

m – показывает, сколько раз в году начислялись проценты.

Если $p = m$, то ренты называются простыми, если $p \neq m$ – общими.

Основными показателями финансовых рент являются: будущая (наращенная) сумма финансовой ренты (S) и современная стоимость всей ренты (A). Все остальные параметры: процентная ставка, величина платежа, срок ренты – можно определить, исходя из базовых формул.

Наращенная (будущая) сумма ренты – сумма всех платежей с начисленными на них процентами.

Современная (приведенная) стоимость ренты – сумма всех платежей вместе с процентами, пересчитанная на начальный момент времени ренты с помощью операции дисконтирования.

Для расчета наращения или дисконтирования платежей, как правило, используют сложную процентную ставку.

Найдем формулы наращения суммы и современной стоимости для простой ренты постнумерандо.

Для этого сформулируем задачу в общем виде: в банк в конце каждого года вносится сумма в размере R рублей в течение n лет, на которые начисляются сложные проценты по ставке i_c % годовых. Определите наращенную сумму и современную стоимость аннуитета постнумерандо.

Решение:

Так как платежи вносятся в конце года, то аннуитет постнумерандо, начисление процентов происходит по декурсивному методу, тогда на первый взнос начисляются проценты n – 1 год, на второй взнос n – 2 года и т. д. В результате наращенная сумма к концу срока составит:

$$S = R(1+i_c)^{n-1} + R(1+i_c)^{n-2} + \ldots + R(1+i_c) + R\ .$$

Заметим, что слагаемые в правой части равенства образуют сумму геометрической прогрессии справа налево, первый член геометрической прогрессии $b_1=R$, а знаменатель геометрической прогрессии $q = (1+i_c)$. Воспользовавшись формулой для нахождения суммы геометрической прогрессии ($S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$), получим формулу для расчета наращенной суммы аннуитета постнумерандо:

$$S = R\frac{(1+i_c)^n - 1}{i_c} \qquad (15).$$

Для определения современной стоимости годовой ренты необходимо провести дисконтирование каждого платежа на начало срока, после чего все их просуммировать. Формула дисконтирования для сложной процентной ставки имеет вид $P = \frac{S}{(1+i_c)^n}$, тогда в нашем случае имеем:

$$A = \frac{R}{1+i_C} + \frac{R}{(1+i_C)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+i_C)^n} = \frac{R}{1+i_C}\left(1 + \frac{1}{1+i_C} + \frac{1}{(1+i_C)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i_C)^{n-1}}\right)$$

Выражение в скобках представляет собой сумму n членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем геометрической прогрессии $q = \frac{1}{1+i_c}$. Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, современную стоимость ренты постнумерандо запишем в виде:

$$A = R\frac{1-\dfrac{1}{(1+i_c)^n}}{i_c} \quad (16).$$

Задача решена.

Найдем формулы наращения суммы и современной стоимости для простой ренты пренумерандо.

Для нахождения наращенной суммы сформулируем задачу в общем виде: в банк в начале каждого года вносится сумма в размере R рублей в течение n лет, на которые начисляются сложные проценты по ставке i_c % годовых. Определите наращенную сумму и современную стоимость аннуитета пренумерандо.

Решение:

Так как платежи вносят в начале года, то аннуитет пренумерандо – начисление процентов происходит по антисипативному методу: на первый взнос начисляются проценты n лет, на второй взнос n – 1 год, на третий n – 2 года и т. д. Наращенная сумма в этом случае к концу срока составит:

$$S = R(1+ i_c)^n + R(1+ i_c)^{n-1} + \ldots + R(1+ i_c).$$

Слагаемые в правой части равенства образуют сумму геометрической прогрессии справа налево, первый член которой $b_1 = R(1 + i_c)$, а знаменатель q = (1 + +i_c). Таким образом, используя формулу для нахождения суммы геометрической прогрессии, формулу наращенной величины ренты пренумерандо запишем в виде:

$$S = R(1+i_c)\frac{(1+i_c)^n-1}{i} \quad (17).$$

Для определения современной стоимости годовой ренты пренумерандо необходимо провести дисконтирование каждого платежа, после чего все их просуммировать.

$$A = R + \frac{R}{1+i_c} + \frac{R}{(1+i_c)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+i_c)^{n-1}} = R(1 + \frac{1}{1+i_c} + \frac{1}{(1+i_c)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i_c)^{n-1}})$$

Выражение в скобках представляет собой сумму n членов геометрической прогрессии с первым членом b_1 = 1 и знаменателем геометрической прогрессии $q = \frac{1}{1+i_c}$. С использованием формулы суммы геометрической прогрессии современную стоимость ренты пренумерандо записываем в виде:

$$A = R(1+i_c)\frac{1-\frac{1}{(1+i_c)^n}}{i_c} \qquad (18).$$

Задача решена.

Формулы (15) – (18) применяют, если платежи выплачиваются раз в год и на них начисляются один раз в год проценты. В общем случае, когда в год производят p выплат с начислением процентов по номинальной процентной ставке m раз в году, рента называется p-срочная. Аналогично годовой ренте можно найти наращенную сумму и современную стоимость p-срочной ренты. В результате будем иметь:

- p-срочная рента постнумерандо:

наращенная сумма $S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1}$;

современная стоимость $A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1}$.

- p-срочная рента пренумерандо:

наращенная сумма $S = \frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} \cdot \frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1}$;

современная стоимость $A = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} \frac{R}{p} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1}$.

Отметим еще один тип ренты – «*вечная*» годовая рента, при которой последовательность платежей не ограничена. Наращенная сумма такой ренты бесконечна, а современная величина равна $A = \frac{R}{i_c}$, так как при $n \to \infty$ в формуле (16) в числителе дробь $\frac{1}{(1+i_c)^n} \to 0$.

Рассмотрим пример.

Предприниматель арендует помещение под офис за 30 000 рублей в месяц. Определите выкупную цену арендованного помещения при условии, что годовая ставка 4,86 %.

Дано:

r = 30 000 руб.

$i_c = 4{,}86\,\%$

Найти i_c

Решение:

Найдем $R = r \cdot 12 = 30000 \cdot 12 = 360000$ руб.

тогда $A = \dfrac{R}{i_c} = \dfrac{360000}{0{,}0486} = 7407407{,}41 \approx 7407407$ руб.

Ответ: 7407407 руб.

Поясним решение данной задачи, здесь выкупная цена означает, что если бы арендодатель продал свою недвижимость и полученную сумму положил в банк под 4,86%, то каждый месяц он получал бы процент в сумме 30000 руб. Следовательно, ниже 7407407 руб. арендодателю невыгодно продавать помещение.

В практике финансовых операций встречаются не только постоянные потоки платежей, но и переменные, члены которых изменяются по своей величине в течение срока ренты, как правило, по определенному закону.

Рассмотрим переменную ренту, подчиняющуюся закону арифметической прогрессии.

Пусть имеем аннуитет постнумерандо, платежи которого образуют арифметическую прогрессию с первым членом *R* и разностью *a*. В этом случае говорят о переменном аннуитете с постоянным абсолютным изменением выплат. Если $a > 0$, то размер выплат возрастает, если $a < 0$ то убывают. В последнем случае число выплат (*n*) должно удовлетворять следующему неравенству $n < 1 - \dfrac{R}{a}$, иначе можно получить отрицательные платежи, что противоречит смыслу финансовых потоков.

Современная стоимость такой ренты определяется суммой:

$$A = \frac{R}{1+i_c} + \frac{R+a}{(1+i_c)^2} + \frac{R+2a}{(1+i_c)^3} + \ldots + \frac{R+(n-1)a}{(1+i_c)^n} = \frac{1}{1+i_c}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{R+ka}{(1+i_c)^k}.$$

Формулу для современной стоимости годовой ренты с изменениями платежей по закону арифметической прогрессии можно записать в виде:

$$A = \left(R + \frac{a}{i_c}\right) \cdot \frac{(1+i_c)^n - 1}{i_c(1+i_c)^n} - \frac{na}{i_c(1+i_c)^n} \qquad (19).$$

Наращенная сумма может быть определена по формуле:

$$S = A(1+i_c)^n \qquad (20)$$

Для определения современной стоимости и наращенной суммы ренты пренумерандо необходимо в формулах (19), (20) правую часть равенства умножить на сумму $1 + i_c$.

Пример.

За 9 лет необходимо накопить 90 000. руб. Какова должна быть величина первого вклада, если предполагается каждый год уменьшать величину денежного поступления на 900 руб. и процентная ставка равна 9% годовых. Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляется в конце года.

Дано:	Решение:
S=90 000 руб.	Наращенную сумму финансовых рент с ежегодными изменениями выплат на постоянную величину,
n=9 лет	
i_c = 9%	если выплаты и начисление происходят
a = -900 руб.	в конце года, находят по формуле:
Найти:	$S=(R+\frac{a}{i_C})\frac{(1+i_C)^n-1}{i_C}-\frac{na}{i_C}$ Выразим из этой формулы R
R – ?	$S\cdot i_C=(R+\frac{a}{i_C})((1+i_C)^n-1)-na$;

$$R+\frac{a}{i_C}=\frac{Si_C+na}{(1+i_C)^n-1};$$

$$R=\frac{Si_C+na}{(1+i_C)^n-1}-\frac{a}{i_C}$$; тогда

$$R=\frac{90000\cdot 0{,}09-9\cdot 900}{(1+0{,}09)^9-1}+\frac{900}{0{,}09}=10000$$ руб.

Ответ: Величина первого вклада равна 10 000 руб.

Контрольные вопросы:

1. Что представляет собой в финансовой практике поток платежей?
2. Дайте определение финансовой ренте.
3. Перечислите виды финансовых рент.
4. Что представляет собой современная стоимость ренты?
5. Что представляет собой наращенная стоимость ренты?
6. Какая рента называется простой, а какая общей?
7. Какие переменные ренты вы знаете?

РАЗДЕЛ 2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

§ 2.1 НАЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ НА СУММУ ВКЛАДОВ ДО ВОСТРЕБОВАНИЯ

Банк заключает с вкладчиком договор на условиях выдачи вклада по первому требованию (до востребования), называемый вкладом до востребования. Сумма, находящаяся на таком вкладе, обычно часто изменяется. В этом случае для нахождения всех параметров используют постоянный делитель, который называют *процентным ключом,* или *дивизором*. В финансовых вычислениях дивизор обозначают символом D, он равен $\frac{36000}{i_п}$ или $\frac{36500}{i_п}$ (здесь значение $i_п$ выражается в процентах).

Дивизор численно равен такому количеству денежных единиц, с которого при ставке $i_п$ получается 1 денежная единица дохода в день.

Процентный платеж в этом случае будет равен $I = \frac{P \cdot t}{D}$, где $P \cdot t$ называют *процентным числом*.

Данный метод начисления процентов называется расчетом «от ста».

Ясно, что процентный платеж, вычисляемый с использованием дивизора $\frac{36500}{i_п}$, будет меньше, чем процентный платеж, полученный при использовании дивизора $\frac{36000}{i_п}$. Поэтому при обслуживании конкретного вклада всегда берется только один из дивизоров.

Пример 1 (процентная ставка за весь период финансовой операции не изменяется).

В банке 8 апреля был открыт счет до востребования на сумму 150 000 рублей под простую процентную ставку 15 % годовых, 15 мая была снята сумма 60 000 рублей, 7 июля на счет внесено 30 000 рублей, 3 августа счет пополнили на 18 000 рублей, 19 октября со счета сняли 40 000 рублей, 1 ноября счет был закрыт. Определите сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета. При расчете используйте французскую практику.

Решение:

Дано:	Решение:
t_1 – 08.04.	При французской практике берется 360 дней года
P_1=150000 руб.	считается, следовательно, дивизор равен $D = \frac{36000}{15} = 2400$
t_2 – 15.05.	1. 8.04 – 15.05 – 37 (дней) (см. табл. 1 приложения)
P_2=6000 руб.	$P \cdot t = 150000 \cdot 37 = 5500000$ (руб.)
t_3 – 07.07.18	2. 15.05 – 07.07 – 53 дня
P_3=30000 руб.	$P \cdot t = 90000 \cdot 53 = 4770000$ (руб.)
t_4 – 03.08.	3. 07.07 – 03.08 – 27 (дней)
P_4=18000 руб.	$P \cdot t = 120000 \cdot 27 = 3240000$ (руб.)
t_5 – 19.10.	03.08 – 19.10 – 77 (дней)
P_4=40000 руб.	$P \cdot t = 138000 \cdot 77 = 10626000$ (руб.)
t_i – 01.11.	19.10 – 01.11 – 13 (дней)
i_n = 15%	$P \cdot t = 98000 \cdot 13 = 1274000$ (руб.)
Найти: *Сумму при закрытии счета.*	Сумма процентного дохода:

$$I = \frac{\sum P \cdot t}{D} = \frac{5550000 + 4770000 + 3240000 + 10626000 + 1274000}{2400} = \frac{25460000}{2400} =$$

$$= 10608,33 \text{ (руб.)}$$

S = 98 000 + 10 608,33 = 108 608,33 руб.

Данную задачу удобно представить в виде таблицы движения денежных средств:

Таблица. Движение денежных средств на вкладе

Дата	Движение средств	Остаток	Срок	Процентное число *Pt*
08.04	+ 150 000	150 000	37	5 550 000
15.05	– 60 000	90 000	53	4 770 000
07.07	+ 30 000	120 000	27	3 240 000
03.08	+ 18 000	138 000	77	10 626 000
19.10	– 40 000	98 000	13	1 274 000
01.11		98 000	–	–
$\sum$				25 460 000
Итого	98000 + 10608,33 = 108608,33			

$$I = \frac{\sum P \cdot t}{D} = \frac{25460000}{2400} = 10608,33 \text{ (руб.)}$$ – доход вклада.

Ответ: 108 608,33 руб. получит вкладчик при закрытии счета.

Пример 2 (процентная ставка в течение периода финансовой операции изменяется): Вкладчик 09.02.18 открыл счет в банке «до востребования» положив на счет 7600 руб. Процентная ставка 7,8% годовых. 17.07.18 на счет поступили 9600 руб., 13.12.18 со счета сняли 10000 руб., 03.03.19 счет был закрыт. 25.08.18 процентная ставка была изменена и увеличилась на 1,2%. Используя французскую практику определить сумму, которую получит клиент банка при закрытии счета.

Дано:	Решение:
t_1 – 09.02.18	При французской практике берется продолжительность
P_1=7600 руб.	года 360 дней, следовательно, дивизор до23.08.18
t_2 – 17.07.18	равен: $D_1 = \frac{36000}{7,8} = 4615{,}38$, после 23.08.18 процентная
P_2=9600 руб.	ставка увеличилась по условию задачи на 1,2% и стала
t_3 – 13.12.18	7,8+1,2 = 9 %, следовательно, дивизор после 23.08.18
P_3=10000 руб.	равен $D_2 = \frac{36000}{9} = 4000$.
t_4 – 03.03.19	Движение денежных средств представим в таблице.
t_i – 23.08.18	Найдем количество дней между движением денежных
i_n = 7,8%	средств
Найти: *Сумму при закрытии счета.*	**1.** 09.02.06 – 17.07.06 – 198-40 = 158 дней (см. табл. 1 приложения)

$$P \cdot t = 7600 \cdot 158 = 1200800$$

2. 17.07.06 – 23.08.06– 235 – 198 = 37 дней

$$P \cdot t = 17200 \cdot 37 = 636400$$

3. 23.08.06 – 13.12.06 – 347 – 235 = 112 дней

$$P \cdot t = 17200 \cdot 112 = 1926400$$

4. 13.12.06 – 03.03.07 – 365 – 347 + 62 = 80 дней

$$P \cdot t = 7200 \cdot 80 = 576000$$

Сумма процентного дохода**:**

$$I_1 = \frac{\sum P \cdot t}{D_1} = \frac{1200800 + 636400}{4615{,}38} = \frac{1837200}{4615{,}38} = 398{,}06 \text{руб.};$$

$$I_2 = \frac{\sum P \cdot t}{D_2} = \frac{1926400 + 576000}{4000} = \frac{2502400}{4000} = 625{,}60 \text{руб.}$$

$$I = I_1 + I_2 = 398{,}06 + 625{,}60 = 1023{,}66 \text{ руб.}$$

Итак, при закрытии счета вкладчик получит:
7200 + 1023,66 = 8223,66 руб.

Таблица. Движение денежных средств на вкладе

Дата	Движение средств	Остаток	Срок	Процентное число Pt
09.02.18	7600	7600	158	1200800
17.07.18	+9600	17200	37	636400
23.08.18	–	17200	112	1926400
13.12.18	-10000	7200	80	576000
03.03.19		7200	–	–

Ответ: 8223,66 руб.

Контрольные вопросы:

1. Основная функция вкладов до востребования.
2. Дать определение дивизора.
3. Что показывает процентное число?
4. Какой метод используется при введении счета для вклада до востребования?
5. По какой практике начисляются проценты по вкладу до востребования?

§ 2.2 ВЛИЯНИЕ ИНФЛЯЦИИ ПРИ НАЧИСЛЕНИИ ПРОЦЕНТОВ

Инфляция – это чрезмерное (по отношению к государственному золотому запасу) увеличение количества обращающихся в стране бумажных денег, вызывающих их обесценивание.

И поскольку инфляция проявляется в падении реальной покупательной способности денег и в общем повышении уровня цен внутри страны, то ее необходимо учитывать при проведении среднесрочных и особенно долговременных финансовых операций.

Учитывать инфляцию стоит по крайней мере в двух случаях: при расчете наращенной суммы денег и при измерении эффективности (доходности) финансовой операции.

При наличии инфляции вкладчик может потерять часть дохода, а заемщик – выиграть за счет погашения долга деньгами со сниженной покупательной способностью.

Отметим, что если происходит общее снижение цен, то происходит дефляция.

Все показатели в финансовых операциях делятся на две группы: номинальные, рассчитанные в текущих ценах и реальные, учитывающие инфляцию. Так, процентные ставки разделяют на брутто-ставки (учитывающие инфляцию) и нетто-ставки (без учета инфляции)

Если была получена наращенная сумма S без учета инфляции, ее покупательная способность будет меньше, если учитывать инфляцию.

Примем за S_α наращенную сумму денег, покупательная способность которой с учетом инфляции равна покупательной способности суммы S при отсутствии инфляции, то есть один и тот же товар можно купить на сумму S (при отсутствии инфляции) и S_α (с учетом инфляции).

Обозначим $\Delta S = S_\alpha - S$. Тогда $\alpha = \frac{\Delta S}{S} = \frac{(S_\alpha - S)}{S}$ называется уровнем (темпом) инфляции. Это **индекс прироста**. Он показывает, **на** сколько процентов возросли в среднем цены за рассматриваемый период.

Наращенная сумма с учетом обесценивания равна $S_\alpha = S \cdot I_p$, где I_p называют индексом инфляции. Это **индекс роста (цены)**. Он показывает, **во** сколько раз в среднем выросли цены за рассматриваемый период. Индекс цен и темп инфляции связаны равенством: $I_p = 1 + \alpha$.

Обратная величина индекса цен называется **индекс покупательной способности денег** (I_c): $I_c = \frac{1}{j_p}$.

Например, если сегодня 1 кг какого-либо продукта стоит 100 рублей, а через некоторое время его стоимость составит 175 рублей, то индивидуальный индекс роста будет равен $I_p = \frac{175}{100} = 1{,}75$, тогда $\alpha = I_p - 1 = 1{,}75 - 1 = 0{,}75$. Это означает, что цены выросли на 75 %. Рассчитав предварительно индекс покупательной способности денег $I_c = \frac{1}{1{,}75} = 0{,}5714$, можно сказать, что теперь на 100 рублей можно купить 0,5714 кг рассматриваемого продукта.

Инфляция является цепным процессом. Следовательно, индекс цен за несколько периодов равен произведению цепных индексов цен:

$$I_p = \prod_{t=1}^{n} (1 + \alpha_t),$$ где α_t – темп инфляции за период t.

Если α – темп инфляции за один период – будет постоянным, то за n таких периодов индекс цен будет равен:

$$I_p = (1 + \alpha)^n.$$

Например, если в январе месяце зафиксирован уровень инфляции в 3%, в феврале – 2%, в марте – 3%, то индекс цен за первый квартал текущего года составит

$I_p = (1 + 0{,}03) \cdot (1 + 0{,}02) \cdot (1 + 0{,}03) = 1{,}082118 \approx 1{,}0821$, тогда уровень инфляции за данный период равен $\alpha = I_p - 1 = 1{,}0821 - 1 = 0{,}0821$, т.е. 8,21%.

Наращенная сумма с учетом инфляции при начислении простых процентов равна:

$S_{\alpha} = P(1+ni_{п})(1+\alpha)$ или $S_{\alpha} = P(1+ni_{\alpha})$.

Приравняв правые части этих равенств и выразив простую процентную ставку, учитывающую инфляцию, через простую процентную ставку, не учитывающую инфляцию, получим:

$$i_{\alpha} = \frac{ni_{п} + \alpha + ni_{п}\alpha}{n} \quad (21).$$

Последнее равенство показывает, что именно под такую простую процентную ставку, учитывающую инфляцию, нужно поместить первоначальный капитал, чтобы обеспечить реальную доходность в виде годовой простой ставки ссудных процентов $i_{п}$.

Если n = 1 год, то $i_{\alpha} = i + \alpha + i \cdot \alpha$ – данное равенство называется *формула Фишера*. Величина $\alpha + i \cdot \alpha$ называется *инфляционной премией*. В формуле Фишера упускаются индексы для процентной ставки, определяющие по какому методу происходит начисление процентов (сложные, простые), т.к. в данной формуле они равносильны.

Если выразить $i_{п}$ через i_{α} в формуле (21), получим:

$$i_{п} = \frac{ni_{\alpha} - \alpha}{n + n\alpha} \quad (22).$$

Данное равенство называют *формулой реальной доходности* в виде годовой процентной ставки ссудных процентов, когда первоначальный капитал был внесен под простую процентную ставку i_{α} на срок n при уровне инфляции α за рассматриваемый период. В формуле реальной доходности получившееся значение может быть: положительным (происходит реальный рост капитала), отрицательным (происходит эрозия капитала) и равным нулю (наращение поглощается инфляцией). Для того чтобы реальная процентная ставка была положительной, банки периодически пересматривают установленные ими процентные ставки относительно индекса инфляции. Такая операция называется *индексация* ставок.

Рассмотрим, как влияет инфляция на наращенную сумму при начислении процентов по сложной процентной ставке.

Сложные проценты, как уже было отмечено, наиболее часто применяются в долговременных финансовых операциях, и, следовательно, наращение суммы по сложным процентам без учета инфляции является условной величиной.

При начислении сложной процентной ставки, наращенная сумма, учитывающая инфляцию, равна:

$$S_{\alpha} = P(1+i_{c})^{n}(1+\alpha) \text{ или } S_{\alpha} = P(1+i_{\alpha})^{n} .$$

Приравняв правые части данных равенств и выполнив ряд тождественных преобразований, найдем i_α, и i_c:

$$i_\alpha = (1+i_c)\sqrt[n]{1+\alpha}-1 \qquad (23).$$

Формула (23) показывает, что именно под такую сложную ставку ссудных процентов нужно положить первоначальный капитал на срок *n*, чтобы при уровне инфляции α за рассматриваемый период обеспечить реальную доходность в виде сложной годовой ставки (i_c).

$$i_c = \frac{1+i_\alpha}{\sqrt[n]{1+\alpha}}-1 \qquad (24).$$

Формула (24) показывает *реальную* доходность финансовой операции в виде сложной годовой ставки для случая, когда первоначальный капитал был инвестирован под сложную ставку ссудных процентов i_α на срок *n* при уровне инфляции α за рассматриваемый период.

Замечание:

1. Аналогично можно найти процентную ставку, учитывающую инфляцию, для непрерывно начисляемых сложных процентов, номинальной процентной ставки, сложной учетной ставки и др.

2. В реальной жизни установленные банками процентные ставки являются процентными ставками, учитывающие инфляцию.

Рассмотрим пример.

Вклад положили на три месяца под простую ставку ссудных процентов 10 % годовых (считаем, что данная ставка учитывает инфляцию). Уровень инфляции каждый месяц был 2 %, Какова реальная доходность в виде годовой простой ставки ссудных процентов?

Дано:
$\alpha = 2\%$.
ежемесячно
i_a = 10%
$n = \frac{3}{12}$

Найти:
i_n – ?

Решение:
В начале найдем уровень инфляции за весь период финансовой операции, т.к. инфляция каждый месяц была одинакова имеем:

$I_p = (1+\alpha)^n = (1+0{,}02)^3 = 1{,}061208 \approx 1{,}0612$, тогда

$\alpha = I_p - 1 = 1{,}0612 - 1 = 0{,}0612$.

Реальную доходность операции найдем, применив следующую формулу $i = \frac{ni_\alpha - \alpha}{n + n\alpha}$, при этом учтем, что $n = \frac{3}{12} = 0{,}25$, тогда $i_{\text{n}} = \frac{0{,}25\cdot 0{,}1 - 0{,}0612}{0{,}25 + 0{,}25\cdot 0{,}0612} = \frac{-0{,}0362}{0{,}2653} = -0{,}1364$ таким образом произошла эрозия капитала на 13,64%. Реальной доходности нет.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение уровню (темпу) инфляции, индексу инфляции.
2. Дайте определение индексу покупательной способности денег
3. Каким равенством связаны индекс цен и темп инфляции?
4. Формула Фишера. Инфляционная премия.
5. Ставка, учитывающая инфляцию, для случая сложных процентов.

§ 2.3 НАЛОГ НА ВКЛАДЫ

В экономике любой страны налогообложение играет немаловажную роль. Налоги являются одной из составляющих частей государственного дохода. В начале 90-х годов становление рыночных отношений в нашей стране повлекло за собой создание новой финансовой (денежной) системы государства, важную часть которой составляет налоговая система.

Налог – установленный обязательный безэквивалентный платеж, не имеющий конкретного направления в использовании, взимаемый с граждан и юридических лиц.

Это означает, что если мы заплатили налог, то куда он будет направлен (на медицинское обслуживание, на образование, в правоохранительные органы и т. д.) – сказать точно нельзя.

Источником налоговых средств может быть доход или капитал. Например, в ряде стран проценты, получаемые при помещении некоторого денежного вклада, облагаются налогом, что, естественно, ведет за собой уменьшение реальной наращенной суммы.

В Российской Федерации вопрос налогообложения полученных процентных доходов по вкладам регулируется ст. 214.2 Налогового кодекса РФ. Данная статья определяет два варианта, при которых возникает необходимость исчисления и уплаты налога:

- в случае с вкладами в национальной валюте (в рублях) НДФЛ должен уплачиваться, когда депозитный процент превышает ключевую ставку, установленную ЦБ РФ более чем на 5 процентных пунктов (например, при ключевой ставке 6% облагаться налогом должны рублевые вклады свыше 11% годовых);
- при валютных вкладах - когда ставка по договору превышает 9% годовых.

В этом случае налоговая база равна разнице между суммой процентов, начисленных по ставке договора, и суммой процентов, рассчитанной исходя из предельной ставки, установленной законодательно. При этом учитывается номинальная ставка, а не эффективная, которая может быть выше, к примеру, за счет капитализации процентов. Ставка налога составляет 35% для резидентов РФ и 30% для нерезидентов, пребывающих на территории России не менее 183 дней. Рассчитывается и удерживается налог с той периодичностью, с которой происходит уплата процентов по договору (месяц, квартал, в конце срока, в начале срока). То есть процент (доход) вклада будет уменьшенной на сумму НДФЛ.

В 2020 году президент РФ, во время обращения к населению в связи с пандемией коронавируса, предложил обложить 13%-ным налогом процентные доходы со вкладов и инвестиций в долговые ценные бумаги свыше одного миллиона рублей. Предложения президента оформлены в виде поправок к ранее принятому законопроекту. Согласно новой версии НДФЛ по ставке 13% будет взиматься с суммы процентов по всем вкладам и счетам в российских банках гражданина, которая превышает доход в размере ключевой ставки с 1 млн рублей. Например, при ключевой ставке (6% годовых) налогом будут облагаться доходы отвкладов, превышающие 60 000 руб. в год. При этом в налоговой базе не будут учитываться проценты по рублевым вкладам (остаткам на счетах), если ставка по ним в течение всего налогового периода не превышает 1% годовых. То есть из-под налога выведено большинство текущих и карточных счетов, вкладов до востребования. Если доход по вкладу номинирован в валюте, он будет пересчитываться в рубли по официальному курсу ЦБ на дату фактического получения дохода.

Держатели банковских вкладов или владельцы долговых ценных бумаг объемом свыше 1 млн рублей будут платить налог на процентный доход, полученный с 2021 года.

Рассмотрим в начале схемы наращения с учетом налога на весь доход по различным видам процентных ставок.

Пусть наращение первоначальной суммы P происходит по простой процентной ставке $i_п$ в течение времени n, тогда проценты составят величину, равную $I = P \cdot i_п \cdot n$. Если ставка налога на проценты равна q, то государству надо выплатить величину $I \cdot q = P \cdot i_п \cdot n \cdot q$. Тогда наращенная сумма с учетом выплаты налога (S_q) на проценты составит:

$$S_q = S - Iq = P(1 + ni_n) - Pi_n nq = P(1 + ni_п(1 - q)) \quad (27),$$

то есть по существу наращение происходит по ставке, равной $i_п(1-q)$, которая всегда меньше $i_п$.

Отметим, что, проведя аналогичные рассуждения, можно найти наращенную сумму с учетом налога на проценты, если начисление происходит по простой учетной ставке.

Если проценты при начислении по сложной процентной ставке облагаются налогом по ставке q %, то они могут выплачиваться двумя способами:

1) за весь срок сразу;
2) за каждый временной период начисления процентов.

При первом способе величина налога равна:

$$I_q = (S - P)q = (P(1+i_c)^n - P)q = Pq((1+i_c)^n - 1)\,.$$

Тогда наращенная сумма с учетом налога составит:

$$S_q = S - I_q = P(1+i_c)^n - Pq((1+i_c)^n - 1) = P((1+i_c)^n - (1+i_c)^n q + q) =$$
$$= P((1+i_c)^n (1-q) + q)$$

$$S_q = P((1+i_c)^n (1-q) + q) \quad (25).$$

Для второго способа налог на проценты за каждый временной период является переменной величиной. Пусть наращение капитала происходит по сложной годовой процентной ставке, тогда:

– за первый год налог на проценты составит:

$$I_{q1} = (S_1 - P)q = P(1+i_c)q - Pq = Pq(1+i_c-1) = Pqi_c\,;$$

– за второй год:

$$I_{q2} = (S_2 - S_1)q = P(1+i_c)^2 q - P(1+i_c)q = P(1+i_c)q(1+i_c-1) = Pq(1+i_c)i_c\,;$$

– за третий год:

$$I_{q3} = (S_3 - S_2)q = P(1+i_c)^3 q - P(1+i_c)^2 q = P(1+i_c)^2 q(1+i_c-1) =$$
$$= Pq(1+i_c)^2 i_c\,;$$

…

– за t-й год:

$$I_{qt} = (S_t - S_{t-1})q = P(1+i_c)^t q - P(1+i_c)^{t-1} q = P(1+i_c)^{t-1} q(1+i_c-1) =$$
$$= Pq(1+i_c)^{t-1} i_c.$$

Сумма налога за весь срок составит:

$$I_q = \sum_{t=1}^{n} I_{qt} = \sum P(1+i_c)^{t-1} qi_c = Pqi_c(1+(1+i_c)+(1+i_c)^2+\ldots+(1+i_c)^n) \quad (*)$$

Множитель в скобках представляет сумму n членов возрастающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = (1+i_c) > 1$, тогда по формуле суммы геометрической прогрессии его (множитель) можно представить в виде:

$$S = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1} = \frac{1\cdot\left(\left(1+i_c\right)^n - 1\right)}{1+i_c-1} = \frac{\left(1+i_c\right)^n - 1}{i_c}\,.$$

Подставим полученное выражение в формулу (*), имеем:

$$I_q = \sum_{t=1}^{n} I_{qt} = \frac{Pqi_c \cdot \left(\left(1+i_c\right)^n - 1\right)}{i_c} = Pq \cdot \left(\left(1+i_c\right)^n - 1\right).$$

За весь срок общая сумма налога при различных вариантах выплат одинакова, однако для плательщика немаловажную роль играет, каким способом он будет их платить.

Замечание: аналогично можно найти наращенную сумму с учетом налога на процент и для других видов процентных ставок.

Для построения модели учета инфляции и налогов на проценты воспользуемся формулой Фишера и выразим из нее i, имеем:

$$i = \frac{i_\alpha - \alpha}{1+\alpha}.$$

В результате уплаты налога каждая денежная единица дохода снижается на долю q и, следовательно, рентабельность операции уменьшается в той же пропорции. Это можно показать в виде следующего равенства:

$$i_q = i_\alpha \left(1-q\right),$$

Соединив фактор инфляции и налоговый фактор, получим следующую формулу:

$$i = \frac{i_\alpha \left(1-q\right) - \alpha}{1+\alpha} (26).$$

Полученная процентная ставка носит название нормы доходности с учетом инфляции и налога, а также барьерной ставки.

Выразив в формуле (26) i_α получим:

$$i_\alpha = \frac{i + \alpha + i \cdot \alpha}{1-q} \ (27).$$

В формуле (27) i_α это брутто-доходность (процентная ставка учитывающая инфляцию), полученная с помощью формулы Фишера, которая дополнительно индексируется с помощью умножения на коэффициент $\frac{1}{1-q}$.

Таким образом, получаем показатель рентабельности (i_α), который будет покрывать как потери от обесценивания денежной единицы в результате инфляции, так и потери, связанные с обязательной уплатой налогов по установленной ставке.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Первоначальная сумма 8675 руб. помещена в банк на 4 месяцев под 8% годовых (проценты простые). Найти наращенную сумму, если ставка налога на проценты 4% годовых.

Дано:	Решение:
P=8675 руб.	Наращенную сумму с учетом налога
$n = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ года	на процент находим по формуле:
i_n = 8% = 0,08	$S_q = P(1+ni_п(1-q))$, тогда
q = 4% = 0,04	$S_q = 8675\cdot(1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}08\cdot(1-0{,}04)) = 8897{,}08$ руб.
α = 7% = 0,07	

Найти: S_q?

Ответ: 8897,08 рублей.

2. Определить брутто-ставку доходности по операциям компании, если финансовым менеджером заложен уровень чистой рентабельности 15 % в год, темп инфляции, как предполагается, составит 0,9 % в месяц, а налогообложение производится по ставке 20 %.

Дано:	Решение:
i =15%.	Найдем уровень инфляции за весь период, учитывая
α = 0,9% в месяц	что т.к. срок 1 год то месяцев 12, имеем:
q =20%	$\alpha = (1+0{,}009)^{12} - 1 = 0{,}1135$, тогда
n =1	$i_\alpha = \frac{i+\alpha+i\cdot\alpha}{1-q} = \frac{0{,}15+0{,}1135+0{,}15\cdot 0{,}1135}{1-0{,}2} = 0{,}3507\cdot$

Найти: i_α

Ответ: брутто-ставка доходность финансовой операции 35,07%.

3. Вкладчик, гражданин РФ, разместил два вклада на следующих условиях: первый вклад 500 тыс. руб. под 10,5% годовых на срок 1 год; второй вклад 800 тыс. руб. под 17,75% годовых на 6 месяцев с выплатой процентов в конце срока. Найти сумму налога, который будет уплачен из дохода, если ключевая ставка равна 6%. Процентная ставка налога определяем согласно ст.214.2 Налогового кодекса РФ.

Дано:	Решение:
1. P_1=500 тыс. руб.	Действующая льгота: ключевая ставка 6%+5 п.л.
n = 1, i_n = 10,5%	Т.е. налогом на доходы облагаются вклады, по
2. P_2=800 тыс. руб.	которым банки выплачивают 11 и более процентов,

$n = 0{,}5,\ i_n = 17{,}75\%$ следовательно, по первому вкладу налоги взиматься не будут. В результате вкладчик получит доход

Найти: $I_q,\ I$? равный $I = Pin = 500 \cdot 0{,}105 \cdot 1 = 52{,}5$тыс. руб.

Второй вклад подлежит налогу 17,75-11=6,75 процентных пункта. Рассчитаем базу налогооблажения для второго вклада $800 \cdot 0{,}065 \cdot 0{,}5 = 26$ тыс. руб.

Пусть ставка налога 35%, тогда сумма налога составит $I_q = 26 \cdot 0{,}35 = 9{,}1$ тыс. руб.

Доход, который получит вкладчик составит $800 \cdot 0{,}175 \cdot 0{,}5 - 9{,}1 = 61{,}9$ тыс. руб.

Ответ: для первого вклада доход 52,5 тыс. руб, налогом не облагается; для второго вклада доход составил 61.9 тыс. руб., налоговый доход – 9,1 тыс. руб.

4. Вкладчик в начале 2020 года открыл депозит на сумму 1100 тыс. руб. под 5,9% годовых срок на один год. Определить доход и величину налога по процентам если налоговая ставка с дохода свыше 60000 руб. 13%.

Дано:
P=1100 тыс. руб.
$n = 1,\ i_n = 5{,}9\%$
$0{,}5,\ i_n = 17{,}75\%$

Найти: $I_q,\ I$?

Решение:

Найдем доход данной финансовой операции.

$I = Pin = 1100 \cdot 0{,}059 \cdot 1 = 64{,}9$ тыс. руб. Тогда база налогооблажения равна $64{,}9 - 60 = 4{,}9$тыс. руб.

Тогда налоговый вычет составит $4{,}9 \cdot 0{,}13 = 0{,}637$ тыс. руб. В итоге вкладчик получит доход в размере $64{,}9 - 0{,}637 = 64{,}263$ тыс. руб.

Ответ: доход вклада составит 64263 руб., налог – 4900 руб.

Контрольные вопросы:

1. Какая схема налогообложения на проценты по вкладам существует в РФ?
2. Какой множитель наращения по простой процентной ставке в случае учета налога на проценты?
3. Способы расчета налога на проценты для сложной процентной ставки.
4. Выведите формулу наращенной суммы при номинальной процентной ставке с учетом налога.
5. Поясните расчет нормы доходности, учитывающей инфляцию и налоги.

§ 2.4 КОНВЕРСИЯ ВАЛЮТ

Конверсия (с лат. conversio – изменение) **валюты** – операция по обмену валют.

Наращение капитала с использованием конверсии валюты может привести как прибыли, так и к убыткам, а может и не дать никаких изменений относительно первоначальной суммы. Это зависит, во-первых, от процентной ставки, во-вторых, от курса обмена валюты в начале и в конце операции, в-третьих, от инфляции.

Рассмотрим конверсию валюты при покупке и продаже. Анализ доходности при покупке и продаже валюты можно провести на основе соотношения:

$$C = \frac{P}{K_0} \cdot \frac{K_1}{I_p} \qquad (28),$$

где P – сумма в рублях в начале операции;

C – реальная стоимость суммы в рублях в конце операции;

K_0 и K_1 – курс обмена в начале и в конце операции соответственно, имеющий, например, размерность руб./долл.;

I_p – индекс цен за время операции.

Формула (28) называется формулой нахождения реальной стоимости валюты после окончания операции.

Замечание: Иногда нельзя выразить курс одной валюты в другой напрямую. Это происходит, когда нет достаточного количества подходящих сделок на бирже (для рыночного курса) или когда центральные банки не устанавливают соответствующие курсы (для официального курса). В таких случаях можно использовать кросс-курсы валют.

Кросс-курс – это соотношение стоимости двух валют, определяемое на основе их курсов относительно третьей валюты.

Предположим, что мы хотим узнать курс хорватской куны к рублю. Банк России не устанавливает курс куны, поэтому нужно использовать кросс-курсы. Национальный банк Хорватии устанавливает курс куны к доллару (USD/HRK), а Банк России в свою очередь устанавливает курс доллара к рублю (USD/RUB). Поделив второй курс на первый, мы получим курс хорватской куны к рублю:

$$\frac{USD}{RUB} : \frac{USD}{HRK} = \frac{USD \cdot HRK}{RUB \cdot USD} = \frac{HRK}{RUB}$$

Например, если курс валют Национального банка Хорватии на 01 апреля 2020 года составил 6,97 USD/HRK, а российского рубля – 78,73 USD/RUB, то значение курса HRK/RUB на эту дату не трудно вычислить, имеем:

(78,73 USD/RUB) / (6,97 USD/HRK) = 11,3 HRK/RUB.

Введем обозначение $I_k = \frac{K_1}{K_0}$. Тогда формула нахождения реальной стоимости после окончания операции будет выглядеть:

$$C = P \cdot \frac{I_k}{I_p}.$$

Для определения доходности (***a***) в виде сложной процентной ставки рассматриваемой финансовой операции используется принцип финансовой эквивалентности обязательств. В соответствии с этим имеем:

$$C = P \cdot \frac{I_k}{I_p} = P \cdot (1+a)^n \; .$$

Отсюда находим формулу для определения доходности при конверсии валют: $a = \sqrt[n]{\frac{I_k}{I_p}} - 1$ (29).

Из формулы (29) видим, что доходность операции будет равна нулю при выполнении условия $I_k = I_p$, в этом случае наращения капитала не произойдет. Если $I_k > I_p$, операция считается доходной, так как в этом случае доходность будет определяться положительным числом – следовательно, происходит наращение капитала. Если $I_k < I_p$ – операция убыточна, происходит эрозия капитала.

Поскольку цена покупки валюты и цена ее продажи различаются в один и тот же момент времени, то при расчете доходности за K_0 надо принимать цену покупки, а за K_1 цену продажи.

При наращении процентов с конверсией возможны следующие варианты:

1) руб. → СКВ → наращение → СКВ → руб.

2) СКВ → руб. → наращение → руб. → СКВ.

Наращение может вестись как по простой, так и по сложной процентной ставке наращения.

При первом варианте наращения имеем:

- по сложной процентной ставке:

$C = P \cdot \frac{I_k}{I_p}(1+i_c)^n = P \cdot (1+a)^n$, тогда $P \cdot \frac{I_k}{I_p}(1+i_c)^n = P \cdot (1+a)^n$.

Из последнего равенства путем тождественных преобразований выразим ***a***, в результате получим:

$a = (1+i_c)\sqrt[n]{\frac{I_k}{I_p}} - 1$ – доходность финансовой операции.

- по простой процентной ставке:

$C = P\frac{I_k}{I_p}\left(1+ni_{\text{п}}\right) = P\left(1+n \cdot a\right)$, тогда $P\frac{I_k}{I_p}\left(1+ni_{\text{п}}\right) = P\left(1+n \cdot a\right)$.

Путем тождественных преобразований выразим ***a***, в результате получим:

$$a = \frac{I_k}{I_p \cdot n}\left(1 + ni_{\text{п}}\right) - \frac{1}{n}$$ – доходность финансовой операции.

При втором варианте конверсии валюты наращенная сумма с учетом инфляции СКВ определяется выражением:

- по сложной процентной ставке:

$$P_{СКВ} \cdot \frac{\left(1 + i_c\right)^n}{I_k \cdot I_{p_{СКВ}}} = P_{СКВ}\left(1 + a\right)^n,$$

где $P_{\text{СКВ}}$ – первоначальная сумма в СКВ, $I_{p_{СКВ}}$ – индекс цен рассматриваемой СКВ. Тогда имеем равенство:

путем тождественных преобразований выразим ***a***, в результате получим:

$$a = \frac{1 + i_c}{\sqrt[n]{I_K \cdot I_{p_{СКВ}}}} - 1$$ – доходность финансовой операции.

- по простой процентной ставке:

$$a = \frac{1}{I_K \cdot I_{p_{СКВ}} n}\left(1 + ni_{\text{п}}\right) - \frac{1}{n}$$ – доходность финансовой операции.

Проверить вывод данной формулы самостоятельно.

Отметим, что конверсия валюты может вестись и по другим видам процентных ставок.

Пример:

Рубли были проданы по курсу 24,5 руб./долл., а полученная сумма помещена на депозит по сложной процентной ставке 7,9% годовых. Через 2,5 года наращенная сумма была истрачена на покупку долларов по курсу 27 руб./долл. Темп инфляции за этот промежуток времени составил 18 %. Определить доходность финансовой операции.

Дано:	**Решение:**
K_0 = 24,5 руб./дол.	Отношение курса продажи к курсу покупки
K_1 = 27 руб./дол.	составит $I_k = \frac{K_1}{K_0} = \frac{27}{24,5} = 1{,}102$,
n = 2,5 года	индекс цен за данный период равен
i_c = 7,9% = 0,079	I_p=1+0,18=1,18,
α = 18% = 0,18	тогда доходность данной операции равна
Найти: a – ?	$a = (1 + i_c)\sqrt[n]{\frac{I_k}{I_p}} - 1 = (1 + 0{,}18)\sqrt[2,5]{\frac{1{,}102}{1{,}18}} - 1 = 0{,}04$

Таким образом, реально произошло наращение капитала на 4%.

Ответ: доходность данной операции 4% (произошло наращение капитала).

Контрольные вопросы:

1. Определение конверсии валют.
2. Формула нахождения реальной стоимости валюты после окончания операции.
3. Формула нахождения реальной стоимости после окончания операции.
4. Что такое кросс-курс валюты, и чем он отличается от курса валюты?
5. От чего зависит доходность операции при конверсии валют?
6. Вывести формулу доходности финансовой операции при наращении по номинальной процентной ставке.
7. Вывести формулу доходности финансовой операции при непрерывном наращении процентов.

§ 2.5 ПОТРЕБИТЕЛЬСКИЙ КРЕДИТ

Кредит (с латинского creditum – «ссуда», от credo – «верю, доверяю») это финансовая операция предоставления денег или товаров в долг, как правило, с уплатой процентов.

В практике кредитования существуют различные виды кредитов. В зависимости от условий и целей кредиты классифицируют по следующим признакам:

- *по целям кредитования*: **целевой** – деньги выдаются на реализацию определенной цели, прописанной в кредитном договоре, например, на покупку жилья, автомобиля, на образование, и.т.п.; **нецелевой** – предоставленную сумму деньги заемщик вправе тратить по своему усмотрению. Отчитываться перед банком ему не придется, а банк не проверяет цель использования таких кредитов. Ставка по таким кредитам обычно выше, а максимальный срок меньше;
- *по виду обеспечения*: **обеспеченный залогом** – банк выдает кредит под залог имущества (автомобиля, недвижимости), ценных бумаг или драгоценных металлов; **обеспеченный поручительством** – возврат кредита гарантирует не только заемщик, но и его поручитель; **без обеспечения –**кредит выдается без каких-либо гарантий в виде залога или поручительства со стороны заемщика;
- *по способу погашения:* **единовременный –** заемщик закрывает кредит единым платежом в конце срока действия договора; **с**

дифференцированными платежами – выплаты по кредиту осуществляются неравномерными платежами; **с аннуитетными платежами;** выплаты по кредиту осуществляются равномерными платежами;

- *по способу начисления процентов*: **с фиксированной процентной ставкой –** процентная ставка постоянна на весь срок финансовой операции**; с плавающей процентной ставкой – п**роцентная ставка зависит от определенных условий, установленных в договоре, и может меняться как в большую, так и в меньшую сторону;
- *по срокам*: **краткосрочные** – кредиты на срок до1 года, например, представителем краткосрочного кредита является ломбардный кредит; **среднесрочные -** кредиты на срок от 1 до 5 лет, например, потребительский кредит; д**олгосрочные –** кредиты на срок свыше 5 лет, например, ипотечные.

В данном параграфе остановимся на потребительском кредите и рассмотрим методы его погашения.

Потребительский кредит – один из наиболее распространенных способов кредитования населения. Банки и предприятия предоставляют потребительский кредит для стимулирования спроса на товары, которые не всегда могут купить рядовые потребители.

В потребительском кредите чаще всего проценты начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу сразу при открытии кредита. При этом выплаты могут производится как равными платежами (аннуитетный платеж), так и переменными (дифференцированный платеж). Выплаты, чаще всего, осуществляются ежемесячно в определенный кредитным договором срок и включают в себя определенные части процентного платежа и суммы основного долга (тело кредита), а именно $p = P_n + I_n$, где p – величина разового погасительного платежа, P_n – тело кредита; I_n – процентный платеж, n – порядковый номер выплаты.

Классическим временным периодом для выдачи потребительского кредита является срок от одного года до пяти лет.

В финансовой практике существует несколько схем погашения потребительского кредита. Рассмотрим некоторые из них.

1. Равными выплатами

Пусть кредит размером P взят на n лет, годовая ставка простых процентов $i_п$, следовательно, всего надо набрать выплат на сумму $I = P \cdot (1 + n \cdot i_п)$. Если в год предусмотрено (договором о кредите) m выплат, то одна выплата равна:

$$p = \frac{P \cdot (1 + n \cdot i_п)}{m \cdot n}.$$

2. «Правило 78»

При этом способе основной долг P выплачивается равными долями, а процентные деньги в размере $n \cdot i_{п} \cdot P$ – выплатами, уменьшающимися в арифметической прогрессии, и последняя выплата равна разности этой прогрессии. Если в год предусмотрено m выплат (например, 12 – при ежемесячных выплатах), то самая последняя выплата равна d – неизвестной пока разности прогрессии, а первая – $m \cdot n \cdot d$. Тогда сумма всех выплат $d + 2d + ... + mnd = \frac{(1+mn)mnd}{2}$ должна быть равной процентным деньгам, то есть $\frac{(1+mn)mnd}{2} = ni_{п}P$, откуда можно найти d и все выплаты процентных денег.

На практике для нахождения процентных платежей поступают следующим образом: вначале считают сумму номеров всех выплат $N = (1+2+\ldots+m\cdot n) = \frac{(1+mn)m\cdot n}{2}$ и делят процентные деньги на N частей: далее первый платеж равен $m\cdot n$ таких частей, второй платеж будет на одну часть меньше и т. д., последний платеж равен ровно одной части. Например, сумма номеров месяцев в году равна 78, отсюда и название этого правила.

Погашение кредита по «правилу 78» наиболее выгодно для кредитора.

Решим следующую задачу: магазин предоставляет кредит на телевизор стоимостью 12 000 рублей под 28 % годовых, 10 % стоимости телевизора оплачивается сразу, а на остальную часть банк предоставляет покупателю потребительский кредит сроком на один год. Составьте план погашения данного кредита по «правилу 78». Оплата ежемесячная.

Решение:

$12000 \cdot 0{,}1 = 1200$ (руб.) оплатит потребитель сразу, 12000 – 1200 = = 10800 (руб.) сумма предоставленного кредита банком, т. е. P =10800 руб.

Проценты за данный кредит составят:

$I = Pni_{п} = 10800 \cdot 1 \cdot 0{,}28 = 3024$ (руб.)

Сумма, которую заплатят за предоставленный кредит, составит:

$S = P(1+ni_{п}) = 10800(1+1\cdot 0{,}28) = 13824$ (руб.)

Значит, ежемесячные выплаты будут составлять: $p = \frac{13824}{1\cdot 12} = 1152$ рубля.

План ежемесячных погашений по данному кредиту удобнее показывать в виде следующей таблицы.

Таблица. План ежемесячного погашения кредита.

№	Сумма погашения процентных денег (руб.)	Сумма погашения основного долга (руб.)	Остаток основного долга (руб.)
1	465,23	686,77	10 800
2	426,46	725,54	10 113,23
3	387,69	764,31	9387,69
4	348,92	803,08	8623,38
5	310,15	841,85	7820,30
6	271,38	880,62	6978,45
7	232,62	919,38	6097,83
8	193,85	958,15	5178,45
9	155,08	996,92	4220,30
10	116,31	1035,69	3223,38
11	77,54	1074,46	2178,69
12	38,77	1113,23	1113,23
Итого	3024	10 800	

Формулы, использующиеся при расчетах:

$I_n = \frac{m-(n-1)}{N} \cdot I$ – процентный платеж n-ой выплаты.

$P_n = p - I_n$ – тело кредита n-ой выплаты.

Вычисления:

1. $I_1 = \frac{12}{78} \cdot 3024 = 465,23$ $P_1 = 1152 - 465,23 = 687,77$ $10800 - 686,77 = 10113,23$

2. $I_2 = \frac{11}{78} \cdot 3024 = 426,46$ $P_2 = 1152 - 426,46 = 725,54$ $1011,23 - 725,54 = 9387,69$

3. $I_3 = \frac{10}{78} \cdot 3024 = 387,69$ $P_3 = 1152 - 387,69 = 764,31$ $9387,69 - 764,31 = 8623,38$

4. $I_4 = \frac{9}{78} \cdot 3024 = 348,92$ $P_4 = 1152 - 348,92 = 803,08$ $8623,38 - 803,08 = 7820,30$

5. $I_5 = \frac{8}{78} \cdot 3024 = 310,15$ $P_5 = 1152 - 310,15 = 814,85$ $7820 - 841,85 = 6978,45$

6. $I_6 = \frac{7}{78} \cdot 3024 = 271,38$ $P_6 = 1152 - 271,38 = 880,62$ $6978,45 - 880,62 = 6097,83$

7. $I_7 = \frac{6}{78} \cdot 3024 = 232,62$ $P_7 = 1152 - 232,62 = 919,38$ $6097,83 - 919,38 = 5178,45$

8. $I_8 = \frac{5}{78} \cdot 3024 = 193,85$ $P_8 = 1152 - 193,85 = 958,62$ $5178,45 - 958,15 = 4220,30$

9. $I_9 = \frac{4}{78} \cdot 3024 = 155,08$ $P_9 = 1152 - 155,08 = 996,92$ $4220,30 - 996,92 = 3223,38$

10. $I_{10}=\frac{3}{78}\cdot 3024=116,31$ $P_{10}=1152-116,31=1035,69$ $3223,38-1035,69=$
$=2187,69$

11. $I_{11}=\frac{2}{78}\cdot 3024=77,54$ $P_{11}=1152-77,54=1074,46$ $2187,69-1074,46=$
$=1113,23$

12. $I_{12}=\frac{1}{78}\cdot 3024=38,77$ $P_{12}=1152-33,77=1113,23$ $1113,23-1113,23=0$

3. Метод счета «от ста»

При данном методе погашения кредита учитывается, что долг не является постоянной величиной и со временем уменьшается, а значит, процентные платежи за пользование потребительским кредитом рассчитываются каждый раз на оставшуюся часть долга. Сам же долг может выплачиваться как равными суммами, так и переменными.

Процентные платежи для каждой выплаты начисляются по формуле:

$$I_n=\frac{P\cdot i_{\text{п}}}{12}(1-\frac{n-1}{m}),$$

где n – порядковый номер выплат. Процентные платежи при данном методе также являются выплатами, уменьшающимися в арифметической прогрессии, где последняя выплата – разность арифметической прогрессии, $d=-\frac{Pi_{\text{п}}}{12\cdot m}$, первая выплата процентов – первый член арифметической прогрессии $a_1=I_1=-\frac{Pi_{\text{п}}}{12}$.

Общая величина процентных выплат за пользование предоставленным кредитом вычисляется по формуле суммы арифметической прогрессии:

$$I=\frac{2a_1+d\left(m-1\right)}{2}\cdot m=\frac{\frac{2Pi_{\text{п}}}{12}-\frac{Pi_{\text{п}}\left(m-1\right)}{12m}}{m}\cdot m=\frac{Pi_{\text{п}}}{12}\cdot\frac{2-\frac{m-1}{m}}{2}\cdot m=\frac{Pi_{\text{п}}}{12}\frac{2m-m+1}{2m}\cdot m=\frac{Pi_{\text{п}}}{12}\frac{m+1}{2}$$

$$==\frac{Pi_{\text{п}}}{24}\left(m+1\right),$$

где $\frac{i_{\text{п}}}{24}\left(m+1\right)$ – процентный коэффициент.

Сумма ежемесячных взносов за данный кредит равна:

$$p=\frac{P}{m}+I_n.$$

Погашение кредита по методу счета «от ста» наиболее выгодно для заемщика.

Составим по методу счета «от ста» план погашения потребительского кредита, в рассмотренном нами выше примере и рассчитанном по «правилу 78».

Решение:

Ежемесячная выплата основного долга: $\dfrac{P}{m} = \dfrac{10800}{12} = 900$ рублей.

Ежемесячные процентные платежи:

$$I_1 = \frac{Pi_{\text{п}}}{12} = \frac{10800 \cdot 0,28}{12} = 252 \text{ руб.}$$

$$I_2 = \frac{P \cdot i_{\text{п}}}{12}(1 - \frac{2-1}{12}) = 252 \cdot \frac{11}{12} = 231 \text{ руб.}$$

$$I_3 = \frac{P \cdot i_{\text{п}}}{12}(1 - \frac{3-1}{12}) = 252 \cdot \frac{10}{12} = 210 \text{ руб.}$$

$$I_4 = \frac{P \cdot i_{\text{п}}}{12}(1 - \frac{4-1}{12}) = 252 \cdot \frac{9}{12} = 189 \text{ руб.}$$

$$I_5 = \frac{P \cdot i_{\text{п}}}{12}(1 - \frac{5-1}{12}) = 252 \cdot \frac{8}{12} = 168 \text{ руб.}$$

$$I_6 = \frac{P \cdot i_{\text{п}}}{12}(1 - \frac{6-1}{12}) = 252 \cdot \frac{7}{12} = 147 \text{ руб.}$$

$$I_7 = \frac{P \cdot i_{\text{п}}}{12}(1 - \frac{7-1}{12}) = 252 \cdot \frac{6}{12} = 126 \text{ руб.}$$

$$I_8 = \frac{P \cdot i_{\text{п}}}{12}(1 - \frac{8-1}{12}) = 252 \cdot \frac{5}{12} = 105 \text{ руб.}$$

$$I_9 = \frac{P \cdot i_{\text{п}}}{12}(1 - \frac{9-1}{12}) = 252 \cdot \frac{4}{12} = 84 \text{ руб.}$$

$$I_{10} = \frac{P \cdot i_{\text{п}}}{12}(1 - \frac{10-1}{12}) = 252 \cdot \frac{3}{12} = 63 \text{ руб.}$$

$$I_{11} = \frac{P \cdot i_{\text{п}}}{12}(1 - \frac{11-1}{12}) = 252 \cdot \frac{2}{12} = 42 \text{ руб.}$$

$$I_{12} = \frac{P \cdot i_{\text{п}}}{12}(1 - \frac{12-1}{12}) = 252 \cdot \frac{1}{12} = 21 \text{ руб.}$$

Сумму процентных платежей за весь кредит можно найти путем непосредственного суммирования всех процентных платежей:

$$I = 252 + 231 + 210 + 189 + 168 + 147 + 126 + 105 + 84 + 63 + 42 + 21 = 1638 \text{ (руб.)}$$

или по формуле:

$$I == \frac{Pi_n}{24}(m+1) = \frac{10800 \cdot 0,28}{24}(12+1) = 1638 \text{ руб.}$$

Если выплаты производятся равными суммами, то средний ежемесячный платеж составит: $p = \frac{12438}{12} = 1036,50$ (руб.)

План погашения кредита представим в табличной форме:

Таблица. План погашения кредита.

№	Процентный платеж (руб.)	Месячная выплата основного долга (руб.)	Остаток основного долга (руб.)	Сумма месячного погашенного взноса (руб.)
1	252	900	9900	1152
2	231	900	9000	1131
3	210	900	8100	1110
4	189	900	7200	1089
5	168	900	6300	1068
6	147	900	5400	1047
7	126	900	4500	1026
8	105	900	3600	1005
9	84	900	2700	984
10	63	900	1800	963
11	42	900	900	942
12	21	900	-	921
Итого	1638	10 800	-	12 438

Как видно из решения, процентный платеж по методу счета «от ста» намного меньше, чем процентный платеж за тот же самый кредит, рассчитанный по «правилу 78».

План погашения потребительского кредита можно также рассчитать в электронной таблице MS Excel, воспользовавшись возможностями встроенных финансовых функций. В нем выплаты будут аннуитентными, но по сравнению с «правилом 78», проценты начисляются на остаток долга, что максимально приближенно к планам погашения кредитов в российских банках на настоящий момент. Рассмотрим подробно алгоритм составления плана погашения потребительского кредита в таблице MS Excel 2010 (отметим, что названия функций в других версиях MS Excel могут отличаться от названий функций MS Excel 2010).

Для создания плана погашения потребительского кредита воспользуемся встроенными функциями MS Excel: ОСПЛТ, ПРПЛТ.

ОСПЛТ – возвращает величину платежа в погашение основной суммы по инвестиции за данный период на основе постоянства периодических платежей и постоянства процентной ставки.

ПРПЛТ – возвращает сумму платежей по инвестиции за данный период на основе постоянства сумм периодических платежей и постоянства процентной ставки.

Составим план погашения кредита для условий, определенных в примере рассмотренном выше («правило 78», метод счета «от ста»).

Решение:

1. Создадим новую книгу MS Excel. Для этого откроем программу MS Excel: **Пуск → Программы → Office → MS Excel.** Перед вами откроется Новый документ MS Excel под названием Книга 1. Переименуем ее, для этого произведем следующие действия: **Файл → Сохранить как,** перед вами откроется окно **Сохранение документов**; в строке *имя файла* введите **Финансовые вычисления,** затем определите, где вы будете сохранять созданный файл, после чего нажмите кнопку **Сохранить.** Переименуйте лист 1 как «Потребительский кредит».

2. Заполните ячейки в соответствии с рис. 3. Если вы хотите перенести слово в ячейке на другую строку, нажмите сочетание клавиш Alt + Enter перед переносом слова.

	A	B	C	D	E	F
1	размер кредита	10800		годовая процентная ставка	количество выплат в год	
2	срок	1		28,00%	12	
3	процентная ставка					
4	количество выплат по кредиту					
5						
6	порядковый номер выплаты	платежи по процентам	платежи по основному долгу	переодические платежи	остаток долга	
7						
8						
9						
10						

Рис. 3. Исходные данные задачи

3. В ячейке В 1 установите денежный формат. Формат → Ячейка → Число → Денежный → ОК.

4. В ячейку А7 введите 1. В ячейку А8 введите 2.

5. Перейдите в ячейку В3, введите формулу: = D2/E2. Нажмите Enter.

6. Перейдите в ячейку В4, введите формулу: = В2*Е2. Нажмите Enter.

7. Перейдите в ячейку В7: Формула → Финансовые → ПРПЛТ → ОК.

8. В окно Аргументы функции ввести Ставка: $В$3, Период: А7, Кпер: $В$4, ПС: – $В$1. ОК. Обратите внимание, что перед $В$1 вы должны поставить знак «-«, если он не будет поставлен в таблице вы увидите отрицательные

значения. Также обращаем внимание, что, в формулах, применяемых при решении задачи, используется абсолютная ссылка. Абсолютной ссылке предшествует знак доллара: B3. Знак доллара запирает ячейку, и программа Excel не может ее изменить при заполнении формулой или копировании в другую ячейку. При вводе формулы с клавиатуры надо ввести знак доллара перед адресом строки и столбца, а также можно, выбрав ячейку, нажать клавишу F4, чтобы добавить знак доллара к столбцу и строке.

9. Перейдите в ячейку C7 Вставка → Функция → Категория → Финансовые → ОСПЛТ → OK.

10. В окне Аргументы функции ввести Ставка: B3, Период: A7, Кпер: B4, ПС: – B1. OK.

11. В ячейку D7 введите формулу: = B7 + C7. Нажмите Enter.

12. В ячейку E7 введите формулу: = B1 – C7. Нажмите Enter.

13. В ячейку E8 введите формулу: = E7 – C8 Нажмите Enter.

14. Для того, чтобы план был рассчитан для нужного количества выплат, произведите следующие действия: выделите с помощью мышки ячейки A7:A8. Установите курсор в нижний правый угол, чтобы появился черный крестик, и протяните вниз на нужное количество строк, выполните аналогичные действия с ячейками B7, C7, D7 и E8.

15. В результате должна получится следующая таблица. Представленная на рисунке 4.

	A	B	C	D	E	F
1	размер кредита	10800		годовая процентная ставка	количество выплат в год	
2	срок	1		28,00%	12	
3	процентная ставка	0,02333333				
4	количество выплат по кредиту	12				
5						
6	порядковый номер выплаты	платежи по процентам	платежи по основному долгу	переодические платежи	остаток долга	
7	1	252,00р.	790,26р.	1 042,26р.	10 009,74р.	
8	2	233,56р.	808,70р.	1 042,26р.	9 201,03р.	
9	3	214,69р.	827,57р.	1 042,26р.	8 373,46р.	
10	4	195,38р.	846,88р.	1 042,26р.	7 526,57р.	
11	5	175,62р.	866,64р.	1 042,26р.	6 659,93р.	
12	6	155,40р.	886,87р.	1 042,26р.	5 773,06р.	
13	7	134,70р.	907,56р.	1 042,26р.	4 865,50р.	
14	8	113,53р.	928,74р.	1 042,26р.	3 936,77р.	
15	9	91,86р.	950,41р.	1 042,26р.	2 986,36р.	
16	10	69,68р.	972,58р.	1 042,26р.	2 013,78р.	
17	11	46,99р.	995,28р.	1 042,26р.	1 018,50р.	
18	12	23,76р.	1 018,50р.	1 042,26р.	-0,00р.	
19	Итого	1 707,18р.	10 800,00р.	12 507,18р.		
20						

Рис. 4. План погашения потребительского кредита

16. Если нужно найти сумму всех процентных платежей, перейдите на последнюю пустую ячейку столбца В, нажмите на значок ∑ на панели инструментов. Аналогично можно находить сумму для любых столбцов и строк.

17. В некоторых ячейках вместо числовых значений могут появиться знаки #####, это связано с тем, что информация не вмещается в ячейки таблицы. Произведите автоподбор ширины столбцов: выделите те ячейки, в которых вы увидели такие знаки, или диапазон ячеек, после чего произведите действия: Главная → Формат → Столбец → Автоподбор ширины.

Контрольные вопросы:

1. Какие виды кредитов вы знаете?
2. Дать определение потребительского кредита.
3. Пояснить суть метода «Правило 78».
4. Пояснить суть метода счета «от ста».
5. Какой метод погашения потребительского кредита выгоднее для заемщика?

6. По какому закону (математическому) происходят выплаты процентных платежей в потребительском кредите?
7. Какому типу кредита относительно времени относится потребительский кредит?

§ 2.6 РЕСТРУКТУРИЗАЦИЯ КРЕДИТОВ

В финансовой практике кредитных отношений иногда возникают ситуации, когда появляется необходимость замены одного платежа или серии платежей на другой платеж или серию платежей. Например, заемщик, сделав ряд погасительных платежей, в связи с определенными обстоятельствами, стал неплатежеспособным. В результате наступает период просроченной задолженности, при этом могут быть наложены штрафные санкции (зависит от условий кредитного договора). Очень часто в таких ситуациях заемщик обращается к кредитору об отсрочке очередного платежа или об уменьшении его суммы взамен увеличения других, более отдаленных платежей и т.п. Кредитор может согласиться на изменение действующего соглашения при условии, что он ничего не потеряет. Одним из возможных способов снижения кредитной нагрузки для заемщика является такая операция как реструктуризация кредита.

Реструктуризация кредита — действия кредитора по изменению условий погашения кредита.

Главная цель кредитора – уменьшить ежемесячный платеж в данный момент времени, а не общие расходы заемщика.

Исходя из поставленной цели, выделяют несколько вариантов реструктуризации. Рассмотрим некоторые из них.

1. *Пролонгация кредитного договора*.

Пролонгация (от лат. prolongare – удлинять) – продление срока действия какого-либо процесса.

В ряде случаях кредитор кроме продления срока может также уменьшить процентную ставку по выданному займу.

Для того чтобы понять механизм применения пролонгации, рассмотрим следующую задачу: клиент банка оформил кредит в размере 150 000 руб. на год под 17 % годовых (простая процентная ставка). График погашения аннуитетный (правило 78). Через полгода заемщик потерял работу и не смог погашать долг. В течение трех месяцев от него не поступало ни одного платежа. В результате образовалась просрочка в размере трех плановых платежей и была начислена пеня на условиях 34 % годовых на несвоевременную оплату по основному долгу и по процентам. Клиент обратился в банк за помощью. Ему предложили следующее условие: продлить срок договора на один год. Найти ежемесячный платеж при новых условиях договора.

Решение:

Отметим, что если заемщик соглашается на новые условия, банк поступает следующим образом:

- аннулирует начисленные штрафы (зависит от политики банка);
- присоединяет просрочку по процентам к основному долгу, тем самым увеличив сумму задолженности;
- рассчитывает новый график на оставшийся срок.

Найдем ежемесячный платеж для первоначального условия кредита. Так как график погашения аннуитетный, то ежемесячный платеж найдем по следующей формуле:

$$p=\frac{S}{12n}=\frac{P(1+n\cdot i_{п})}{12n}=\frac{150000(1+1\cdot 0{,}17)}{12}=\frac{150000\cdot 1{,}17}{12}=\frac{175500}{12}=14625 \text{ руб.}$$

План погашения представим в таблице. Расчеты проверьте самостоятельно.

Просрочка за три месяца составит $14625\cdot 3=43875$ руб. Тогда пеня будет составлять $\frac{43875\cdot 0{,}34}{4}=3479{,}38$ руб.

Согласно условию задачи новый срок кредита равен 15 месяцев (12 – – 6 – 3 + 12).

Таблица. План погашения кредита.

№ платежа	Сумма погашения процентных денег (руб)	Сумма погашения основного долга (руб)	Остаток основного долга (руб.)	Ежемесячный платеж
1	3 923,08	10701,92	139298,1	14625
2	3 596,15	11028,85	128269,2	14625
3	3 269,23	11355,77	116913,5	14625
4	2 942,31	11682,69	105230,8	14625
5	2 615,38	12009,62	93221,15	14625
6	2 288,46	12336,54	80884,62	14625
7	1 961,54	12663,46	68221,15	14625
8	1 634,62	12990,38	55230,77	14625
9	1 307,69	13317,31	41913,46	14625
10	980,77	13644,23	28269,23	14625
11	653,85	13971,15	14298,08	14625
12	326,92	14298,08	0	14625

Остаток основного долга составит не 80 884,62 руб., а 85 788,47 руб. (долг по состоянию на начало седьмого месяца оплаты кредита + проценты за три неоплаченных месяца, см. таблицу). После пролонгации плановый платеж сократится с 14625 руб. до 6934,57 руб. (проверить самостоятельно).

Отметим, что переплата за кредит на первоначальных условиях составила бы 25500 руб., после пролонгации клиент переплатит за все время 36864,67 руб. (за счет пролонгации стоимость кредита повысится на 36864,67 – 25500 = 11364,67 руб.)

Задача решена.

2. *Кредитные каникулы.*

Кредитные каникулы – отсрочка аннуитетного ежемесячного взноса по кредиту, которую банковская организация может предоставить должнику на некоторое установленное время.

Существует три варианта таких каникул: частичная отсрочка платежа; пересчет кредита по причине перемены валюты кредита (к примеру, валютный на рублевый и наоборот); полная отсрочка платежа.

Рассмотрим подробно каждый из них.

Частичная отсрочка платежа подразумевает составление нового графика взносов (ежемесячных) в пользу погашения кредита. Срок кредитных каникул варьируется от 1 до 12 месяцев. Существует два метода расчета при таком варианте.

Первый вариант. Клиент погашает основной долг, сумма задолженности уменьшается, а через определенный, заранее оговоренный период, к платежу вновь присоединяется оплата процентов. Естественно, в результате снижается общая сумма переплаты. Данный метод наиболее выгоден заемщику, но применяется довольно редко, так как ненамного снижает ежемесячные выплаты, при этом не все банки идут на такие уступки.

Для примера рассмотрим следующую задачу: клиент банка оформил кредит в размере 150 000 руб. на год под 17 % годовых. График погашения аннуитетный (правило 78). Через полгода заемщик потерял работу и не смог погашать долг. Клиент обратился в банк за предоставлением ему кредитных каникул. Банк пошел ему навстречу и предоставил 3 месяца каникул, при условии погашения основного долга. Найти ежемесячный платеж после кредитных каникул.

Решение:

Первоначальные условия кредита совпадают с предыдущей задачей. План погашения кредита представлен в таблице рассмотренной выше задачи. Таким образом, на момент предоставления кредитных каникул основной долг составлял 80884,62 руб. В течение трех последующих месяцев заемщик платит только основной долг последовательными выплатами в рублях: 12663,46; 12990,38; 13317,31.

После трех месяцев каникул, в течение которых заемщик погашал только основной долг, но не платил проценты, сумма долга уменьшится до 41913,46 руб. и проценты начинают начисляться на них. Заемщику осталось сделать три платежа (12 – 6 – 3 = 3), тогда ежемесячный платеж составит:

$$p = \frac{S}{3} = \frac{P(1 + n \cdot i_{\text{п}})}{3} = \frac{41913,46 \cdot (1 + 0,25 \cdot 0,17)}{3} = \frac{41913,46 \cdot 1,0425}{3} = 14564,93 \text{ руб.}$$

Таким образом, переплата составит 20415,94 руб., что на 5084,06 руб. меньше, чем переплата при первоначальных условиях.

Задача решена.

Второй вариант. Банк предоставляет отсрочку по основному долга кредита. Клиент погашает проценты, начисляемые на сумму остатка задолженности. Через определенный оговоренный период возобновляются ежемесячные выплаты, включающие в себя сумму основного долга плюс проценты за оставшийся период, разбитые на равные части.

Для примера рассмотрим следующую задачу: клиент банка оформил кредит в размере 150 000 руб. на год под 17 % годовых. График погашения аннуитетный (правило 78). Через полгода заемщик потерял работу и не смог погашать долг. Клиент обратился в банк за предоставлением ему кредитных каникул. Банк пошел ему навстречу и предоставил 3 месяца каникул, при условии погашения процентов. Найти ежемесячный платеж после кредитных каникул.

Решение:

Как видно из условия задачи первоначальные условия кредита совпадают с задачами рассмотренными ранее. План погашения кредита представлен в таблице рассмотренной выше задачи. Таким образом, на момент предоставления кредитных каникул основной долг составлял 80884,62 руб. В течение трех последующих месяцев заемщик платит только проценты последовательными выплатами в рублях: 1 961,54; 1 634,62; 1 307,69.

После трех месяцев каникул заемщику осталось сделать три платежа (12 – 6 – 3 = 3), тогда ежемесячный платеж составит:

$$p = \frac{80884,62 + (980,77 + 653,85 + 326,92)}{3} = \frac{82828,16}{3} = 27609,39 \text{ руб.}$$

В данном случае переплата составит 25500, что совпадает с переплатой по начальным условиям кредита, однако нагрузка ежемесячных платежей после кредитных каникул для заемщика существенно возрастает.

Задача решена.

3. *Конвертация валютного долга.*

Пересчет кредита по причине перемены валюты кредита достаточно редкий вид реструктуризации. Перевод валюты в рубли производится по курсу ЦБ РФ на момент переоформления договора, при этом ставка кредита увеличивается. С учетом роста курса доллара, для заемщиков, оформивших кредиты до 2008 года, такой вариант реструктуризации кредита был бы им крайне выгоден.

Рассмотрим для примера следующую задачу: Кредит в размере 2 000 евро выдан в 2010 году на 5 лет под 14 % годовых. График погашения аннуитетный (правило 78). Через 4 года заемщик, в связи с ростом курса евро к рублю, не смог оплачивать кредит в евро. Клиент обратился в банк с просьбой реструктуризировать валютный кредит в рублевый. Банк пошел ему навстречу и предложил перевод на рублевый кредит по курсу 1 евро $\leftrightarrow$50 руб., под 19 % годовых на оставшийся год. Найти ежемесячные платежи после реструктуризации кредита.

Решение:

Найдем ежемесячный платеж для первоначального условия кредита, т.к. график погашения аннуитетный, то ежемесячный платеж найдем по следующей формуле:

$$p = \frac{S}{12n} = \frac{P(1+n \cdot i_{п})}{12n} = \frac{2000(1+1 \cdot 0{,}14)}{12 \cdot 5} = \frac{2000 \cdot 1{,}14}{60} = \frac{2280}{60} = 38 \text{ евро.}$$

Фрагмент плана погашения представим в таблице.

Таблица. План погашения валютного кредита.

№ платежа	Сумма погашения процентных денег (руб)	Сумма погашения основного долга (руб)	Остаток основного долга (руб.)	Ежемесячный платеж
46	2,30	35,70	515,93	38
47	2,14	35,86	480,08	38
48	1,99	36,01	444,07	38
49	1,84	36,16	407,90	38
50	1,68	36,32	371,58	38

Как видно из таблицы по окончании 4 лет (48 месяцев) основной долг составляет 444,07 евро. Осуществим конверсию валюты (евро в рубли) $444{,}07 \cdot 50 = 22230{,}5$ руб. Тогда ежемесячный платеж составит:

$$p = \frac{S}{12n} = \frac{P(1 + n \cdot i_{п})}{12n} = \frac{22230{,}5(1 + 1 \cdot 0{,}19)}{12 \cdot 1} = \frac{22230{,}5 \cdot 1{,}19}{12} = \frac{26454{,}3}{12} = 2204{,}52 \text{ руб.}$$

Что составит 44,01 евро.

Задача решена.

Наиболее чаще при реструктуризации кредита за счет перевода валюты предоставляется с увеличением его срока. Так, например, если предыдущей задаче банк увеличил бы срок кредита еще на 1 год, то ежемесячные выплаты составляли 1278,25 руб. Однако, переплата в данном случае составляла бы 8447,59 руб., когда за год переплата за последний год составила 4223,8 руб.

Существует еще один вид преобразования кредитных договоров – рефинансирование.

Рефинансирование – привлечение кредитными организациями дешёвых краткосрочных межбанковских ссуд или кредитов центрального банка для обеспечения выданных банком кредитов.

Хотя часто рефинансирование считают одним из видов реструктуризации, эти два вида существенно различаются.

При рефинансировании осуществляется полное или частичное погашение кредита за счёт получения нового кредита. Рефинансирование банковского кредита применяется в случае изменения рыночных условий и значительного снижения ставок по кредитам, а также в случае снижения платежеспособности заемщика – за счет получения кредита на более длительный срок можно снизить ежемесячные выплаты. Наиболее целесообразно идти на рефинансирование, если новый кредит можно взять под меньшие проценты, сумма невыплаченного долга значительна (погашена меньшая его часть), затраты на досрочное погашение предыдущего кредита и обслуживание нового не превышают выгоду от снижения ставки.

Приложение 1

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1

1. Первоначальная сумма 3500 руб. помещена в банк на полгода под 12% годовых (проценты простые). Найти: наращенную сумму; простую учетную ставку эквивалентную данной; наращенную сумму, если ставка налога на проценты 10%; если учитывается инфляция за рассматриваемый период равная 2% какова реальная доходность операции?
2. Вкладчик 24.01.17 открыл счет в банке «до востребования» положив на счет 3000 руб. Процентная ставка 9% годовых. 13.04.17 на счет поступили 5600 руб., 28.09.17 со счета сняли 4560 руб., 13.08.18 счет был закрыт. 25.08.17 процентная ставка была изменена и увеличилась на 2%. Используя французскую практику определить сумму, которую получит клиент банка при закрытии счета.
3. Доллары были проданы по курсу 28,45 руб./долл., а полученная сумма помещена на депозит по простой процентной ставке 12% годовых. Через полгода наращенная сумма была истрачена на покупку долларов по курсу 30,13 руб./долл. Темп инфляции доллара за этот промежуток времени составил 2%. Определить доходность финансовой операции.
4. Банк выдал потребительский кредит в 70 000 руб. на полгода. Процентная ставка 23% годовых. Составить план погашения кредита по правилу 78. Оплата ежемесячно.
5. За 5 лет необходимо накопить 40 000 руб. Какова должна быть величина первого вклада, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 400 руб. и процентная ставка равна 16% годовых. Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляется в конце года.

ВАРИАНТ 2

1. Первоначальная сумма 6800 руб. помещена в банк на 8 месяцев под 15% годовых (проценты простые). Найти: наращенную сумму; сложную процентную ставку эквивалентную данной; наращенную сумму, если ставка налога на проценты 14%; если учитывается инфляция за рассматриваемый период равная 1,9% какова реальная доходность операции?
2. Вкладчик 14.02.18 открыл счет в банке «до востребования» положив на счет 4000 руб. Процентная ставка 11,5% годовых. 27.07.18 на счет поступили 8400 руб., 13.09.18 со счета сняли 5210 руб., 06.01.19 счет был закрыт.

25.08.18 процентная ставка была изменена и уменьшилась на 2%. Используя английскую практику определить сумму, которую получит клиент банка при закрытии счета.

3. Рубли были проданы по курсу 22,34 руб./долл., а полученная сумма помещена на валютный депозит по сложной процентной ставке 6% годовых. Через год наращенная сумма была истрачена на покупку рублей по курсу 27,69 руб./долл. Темп инфляции за этот промежуток времени составил 9%. Определить доходность финансовой операции.
4. Банк выдал потребительский кредит 18 000 руб. сроком на год. Процентная ставка 25% годовых. Составить план погашения кредита по методу счета «от ста». Оплата ежемесячно.
5. За 6 лет необходимо накопить 50 000. руб. Какова должна быть величина первого вклада, если предполагается каждый год вносить равные взносы и процентная ставка равна 10% годовых. Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляется в начале года.

ВАРИАНТ 3

1. Первоначальная сумма 2540 руб. помещена в банк на 9 месяцев под 8% годовых (проценты простые). Найти: наращенную сумму; номинальную процентную ставку с ежеквартальным начислением эквивалентную данной; наращенную сумму, если ставка налога на проценты 7%; если учитывается инфляция за рассматриваемый период равная 8% какова реальная доходность операции?
2. Вкладчик 16.01.18 открыл счет в банке «до востребования» положив на счет 6000 руб. Процентная ставка 7,5% годовых. 15.08.18 на счет поступили 3500 руб., 24.11.18 со счета сняли 4630 руб., 06.02.19 счет был закрыт. 25.08.18 процентная ставка была изменена и увеличилась на 3%. Используя французскую практику определить сумму, которую получит клиент банка при закрытии счета.
3. Доллары были проданы по курсу 29,65 руб./долл., а полученная сумма помещена на депозит по сложной процентной ставке 8% годовых. Через 1,5 года наращенная сумма была истрачена на покупку долларов по курсу 33,33 руб./долл. Темп инфляции доллара за этот промежуток времени составил 3 %. Определить доходность финансовой операции.
4. Банк на год выдает потребительский кредит на сумму 50 000 руб., процентная ставка 29% годовых. Составить план погашения кредита по правилу 78. Оплата ежемесячно.
5. За 4 года необходимо накопить 40 тыс. руб. Какова должна быть величина первого вклада, если предполагается каждый год уменьшать величину

денежного поступления на 400 руб. и процентная ставка равна 12% годовых. Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляется в конце года.

ВАРИАНТ 4

1. Первоначальная сумма 6500 руб. помещена в банк на 4 месяцев под 6,5% годовых (проценты простые). Найти: наращенную сумму; силу роста эквивалентную данной; наращенную сумму, если ставка налога на проценты 9%; если учитывается инфляция за рассматриваемый период равная 4% какова реальная доходность операции?
2. Вкладчик 07.01.18 открыл счет в банке «до востребования» положив на счет 8000 руб. Процентная ставка 9% годовых. 19.05.18 на счет поступили 7500 руб., 17.09.18 со счета сняли 7853 руб., 05.03.19 счет был закрыт. 25.08.18 процентная ставка была изменена и уменьшилась на 3%. Используя французскую практику определить сумму, которую получит клиент банка при закрытии счета.
3. Рубли были проданы по курсу 29,65 руб./долл., а полученная сумма помещена на валютный депозит по простой процентной ставке 9% годовых. Через полгода наращенная сумма была истрачена на покупку рублей по курсу 30,99 руб./долл. Темп инфляции за этот промежуток времени составил 6 %. Определить доходность финансовой операции.
4. Банк на 1,5 года выдал потребительский кредит на сумму 70 000 руб., процентная ставка 17% годовых. Составить план погашения кредита по методу счета «от ста». Оплата ежемесячно.
5. За 8 лет необходимо накопить 100 000 руб. Какова должна быть величина первого вклада, если предполагается каждый год платить равными взносами, процентная ставка равна 12% годовых (сложные проценты). Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляется в конце года.

ВАРИАНТ 5

1. Первоначальная сумма 5460 руб. помещена в банк на 5 месяцев под 12% годовых (проценты простые). Найти: наращенную сумму; сложную учетную процентную ставку эквивалентную данной; наращенную сумму, если ставка налога на проценты 3%; если учитывается инфляция за рассматриваемый период равная 6% какова реальная доходность операции?
2. Вкладчик 14.02.19 открыл счет в банке «до востребования» положив на счет 12000 руб. Процентная ставка 16,5% годовых. 27.06.19 на счет поступили 6000 руб., 27.09.19 со счета сняли 15000 руб., 18.05.20 счет был закрыт.

01.03.19 процентная ставка была изменена и увеличилась на 4%. Используя французскую практику определить сумму, которую получит клиент банка при закрытии счета.

3. Доллары были проданы по курсу 27 руб./долл., а полученная сумма помещена на депозит по сложной процентной ставке 12% годовых. Через год наращенная сумма была истрачена на покупку долларов по курсу 27,50 руб./долл. Темп инфляции доллара за этот промежуток времени составил 5 %. Определить доходность финансовой операции.
4. Банк на год выдает потребительский кредит на сумму 39 000 руб., процентная ставка 17% годовых. Составить план погашения кредита по правилу 78. Оплата ежемесячно.
5. За 8 лет необходимо накопить 150 000 руб. Какова должна быть величина первого вклада, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 500 руб. и процентная ставка равна 12% годовых. Денежные поступления и начисление простых процентов осуществляется в начале года.

ВАРИАНТ 6

1. Первоначальная сумма 5780 руб. помещена в банк на 7 месяцев под 12% годовых (проценты простые). Найти: наращенную сумму; номинальную процентную ставку с ежемесячным начислением эквивалентную данной; наращенную сумму, если ставка налога на проценты 9%; если учитывается инфляция за рассматриваемый период равная 12% какова реальная доходность операции?
2. Вкладчик 23.03.18 открыл счет в банке «до востребования» положив на счет 10000 руб. Процентная ставка 7,5% годовых. 15.08.18 на счет поступили 7500 руб., 24.11.18 со счета сняли 8500 руб., 06.03.19 счет был закрыт. 01.08.18 процентная ставка была изменена и уменьшился на 3%. Используя французскую практику определить сумму, которую получит клиент банка при закрытии счета.
3. Рубли были проданы по курсу 24,77 руб./долл., а полученная сумма помещена на депозит по простой процентной ставке 9% годовых. Через два года наращенная сумма была истрачена на покупку долларов по курсу 28,55 руб./долл. Темп инфляции за этот промежуток времени составил 12 %. Определить доходность финансовой операции.
4. Банк на год выдает потребительский кредит на сумму 40 000 руб., процентная ставка 18% годовых. Составить план погашения кредита по правилу счета «от ста». Оплата ежемесячно.

5. За 6 лет необходимо накопить 100 тыс. руб. Какова должна быть величина первого вклада, если предполагается каждый год платить равными взносами и процентная ставка равна 12% годовых. Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляется в начале года.

ВАРИАНТ 7

1. Первоначальная сумма 4560руб. помещена в банк на 4 месяцев под 5,5% годовых (проценты простые). Найти: наращенную сумму; учетную сложную ставку эквивалентную данной; наращенную сумму, если ставка налога на проценты 3%; если учитывается инфляция за рассматриваемый период равная 3% какова реальная доходность операции?
2. Вкладчик 05.01.18 открыл счет в банке «до востребования» положив на счет 15000 руб. Процентная ставка 7,95% годовых. 02.07.18 на счет поступили 5500 руб., 29.08.18 со счета сняли 12000 руб., 06.01.19 счет был закрыт. 25.08.18 процентная ставка была изменена и увеличилась на 1,5%. Используя французскую практику определить сумму, которую получит клиент банка при закрытии счета.
3. Доллары были проданы по курсу 24,65 руб./долл., а полученная сумма помещена на депозит по сложной процентной ставке 9% годовых. Через два года наращенная сумма была истрачена на покупку долларов по курсу 25,33 руб./долл. Темп инфляции доллара за этот промежуток времени составил 9 %. Определить доходность финансовой операции.
4. Банк на полгода выдает потребительский кредит на сумму 80 000 руб., процентная ставка 14% годовых. Составить план погашения кредита по правилу 78. Оплата ежемесячно.
5. За 8 лет необходимо накопить 50 000 руб. Какова должна быть величина первого вклада, если предполагается каждый год уменьшать величину денежного поступления на 1000 руб. и процентная ставка равна 8% годовых. Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляется в конце года.

ВАРИАНТ 8

1. Первоначальная сумма 8760 руб. помещена в банк на 8 месяцев под 9% годовых (проценты простые). Найти: наращенную сумму; силу роста эквивалентную данной ставке; наращенную сумму, если ставка налога на проценты 5%; если учитывается инфляция за рассматриваемый период равная 2% какова реальная доходность операции?
2. Вкладчик 27.03.18 открыл счет в банке «до востребования» положив на счет 5000 руб. Процентная ставка 8,9% годовых. 12.09.18 на счет поступили 7500

руб., 02.02.1 со счета сняли 10 000 руб., 06.06.19 счет был закрыт. 25.08.18 процентная ставка была изменена и увеличилась на 2,5%. Используя французскую практику определить сумму, которую получит клиент банка при закрытии счета.

3. Рубли были проданы по курсу 28,88 руб./долл., а полученная сумма помещена на депозит по сложной процентной ставке 8% годовых. Через год наращенная сумма была истрачена на покупку долларов по курсу 28,55 руб./долл. Темп инфляции за этот промежуток времени составил 11 %. Определить доходность финансовой операции.
4. Банк на год выдает потребительский кредит на сумму 90 000 руб., процентная ставка 19% годовых. Составить план погашения кредита по правилу счета «от ста». Оплата ежемесячно.
5. За 7 лет необходимо накопить 80 000 руб. Какова должна быть величина первого вклада, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 500 руб. и процентная ставка равна 9% годовых. Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляется в начале года.

ВАРИАНТ 9

1. Первоначальная сумма 9999 руб. помещена в банк на 9 месяцев под 9% годовых (проценты простые). Найти: наращенную сумму; сложную процентную ставку эквивалентную данной ставке; наращенную сумму, если ставка налога на проценты 6%; если учитывается инфляция за рассматриваемый период равная 9% какова реальная доходность операции?
2. Вкладчик 09.03.18 открыл счет в банке «до востребования» положив на счет 9000 руб. Процентная ставка 9,5% годовых. 19.09.18 на счет поступили 6900 руб., 09.11.18 со счета сняли 5090 руб., 19.02.19 счет был закрыт. 25.08.18 процентная ставка была изменена и увеличилась на 2%. Используя французскую практику определить сумму, которую получит клиент банка при закрытии счета.
3. Доллары были проданы по курсу 29,99 руб./долл., а полученная сумма помещена на депозит по простой процентной ставке 9% годовых. Через 9 месяцев наращенная сумма была истрачена на покупку долларов по курсу 30,95 руб./долл. Темп инфляции доллара за этот промежуток времени составил 4,5 %. Определить доходность финансовой операции.
4. Банк на полгода выдает потребительский кредит на сумму 90 000 руб., процентная ставка 19% годовых. Составить план погашения кредита по правилу 78. Оплата ежемесячно.

5. За 12 лет необходимо накопить 120 000. руб. Какова должна быть величина первого вклада, если предполагается каждый год уменьшать величину денежного поступления на 1200 руб. и процентная ставка равна 12% годовых. Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляется в конце года.

ВАРИАНТ 10

1. Первоначальная сумма 9875 руб. помещена в банк на 5 месяцев под 10% годовых (проценты простые). Найти: наращенную сумму; сложную учетную ставку эквивалентную данной ставке; наращенную сумму, если ставка налога на проценты 5%; если учитывается инфляция за рассматриваемый период равная 4% какова реальная доходность операции?
2. Вкладчик 10.05.19 открыл счет в банке «до востребования» положив на счет 10000 руб. Процентная ставка 10,5% годовых. 25.07.19 на счет поступили 5500 руб., 20.09.19 со счета сняли 12000 руб., 10.04.20 счет был закрыт. 25.08.19 процентная ставка была изменена и увеличилась на 1,5%. Используя французскую практику определить сумму, которую получит клиент банка при закрытии счета.
3. Рубли были проданы по курсу 29 руб./долл., а полученная сумма помещена на депозит по сложной процентной ставке 10% годовых. Через 1,5 года наращенная сумма была истрачена на покупку долларов по курсу 30 руб./долл. Темп инфляции за этот промежуток времени составил 16 %. Определить доходность финансовой операции.
4. Банк на год выдает потребительский кредит на сумму 100 000 руб., процентная ставка 19% годовых. Составить план погашения кредита по правилу счета «от ста». Оплата ежемесячно.
5. За 10 лет необходимо накопить 100 000 руб. Какова должна быть величина первого вклада, если предполагается каждый год выплачивать равными взносами, процентная ставка равна 10% годовых. Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляется в начале года.

Приложение 2

ОБРАЗЕЦ ТЕСТА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ АТТЕСТАЦИИ

Рекомендуемое время выполнения 120 минут

Указания:

Вариант состоит из 30 заданий. Задания 1-27 имеют только один правильный ответ, задания 28-30 должны содержать развернутый ответ.

Типовой вариант

Задание 1

Принцип неравноценности денег заключается в том, что:

Варианты ответов:

а) деньги обесцениваются со временем;

б) деньги приносят доход;

в) равные по абсолютной величине денежные суммы, относящиеся к различным моментам времени, оцениваются по-разному;

г) "сегодняшние деньги ценнее завтрашних денег".

Задание 2

Формула наращения по схеме простых процентов:

Варианты ответов:

а) S = $P \cdot i \cdot n$; б) S = $P \cdot (1+i) \cdot n$;

в) S = $P(1+n \cdot i)$; г) S = $P \cdot (1+i)^n$.

Задание 3

Точный процент – это...

Варианты ответов:

а) капитализация процента;

б) коммерческий процент;

в) расчет процентов, исходя из продолжительности года в 365 или 366 дней;

г) расчет процентов с точным числом дней финансовой операции, исходя из продолжительности года в 365 или 366 дней.

Задание 4

Вексель, имеющий номинальную стоимость 4000 рублей, учтен в банке по простой учетной ставке 15,5 % годовых за 156 дней до его погашения. Определить сумму, полученную владельцем векселя при учете по французской практике.

Варианты ответов:

а) 3733,33 б) 4288,01 в) 3731,33 г) 3967,75

Задание 5

Банковский учет – это учет по…

Варианты ответов:

а) учетной ставке;
б) процентной ставке;
в) ставке рефинансирования;
г) ставке финансирования.

Задание 6

Переводной вексель выдан на сумму 100 тыс. руб. с уплатой 17 ноября. Владелец учел его в банке 23 сентября по учетной ставке 8%. Определить дисконт данной операции.

Варианты ответов:

а) 98777,77 б) 1222,22 в) 87777,77 г) 12222,22

Задание 7

Начисление по схеме сложных процентов предпочтительнее для финансово - кредитного учреждения:

Варианты ответов:

а) при краткосрочных финансовых операциях;
б) при сроке финансовой операции в один год;
в) при долгосрочных финансовых операциях;
г) во всех вышеперечисленных случаях.

Задание 8

Формула сложных процентов с неоднократным начислением процентов в течение года:

Варианты ответов:

а) $S = P \cdot (1+i)^{mn}$; б) $S = P \cdot (1+j/m)^{n}$;

в) $S = P \cdot (1+j/m)^{mn}$; г) $S = P \cdot m \cdot (1+j/m)^{n}$.

Задание 9

Если в условиях финансовой операции отсутствует ставка сложных процентов, то:

Варианты ответов:

а) ее определить нельзя; б) $i = \sqrt[n]{S/P} - 1$;

в) $i = \sqrt[n]{S/P} - n$;   г) $i = \lim(1 + \frac{j}{m}) \cdot m \cdot n$.

Задание 10

Какой вид дисконтирования выгоднее для векселедержателя:

Варианты ответов:

а) математическое дисконтирование;

б) банковский учет;

в) разница отсутствует;

г) зависит от срока операции.

Задание 11

Современное значение суммы в 100 000 рублей, которая будет выплачена через два года при использовании сложной учетной ставки 18 % годовых составляет…

Варианты ответов:

а) 57842   б) 12454   в) 67240   г) 3578

Задание 12

Дисконтный множитель имеет вид

Варианты ответов:

а) $(1 - d_c)^n$; б) $(1 + d_c)^n$; в) $(1 - d_c)^{-n}$;   г) $(1 + d_c)^{-n}$.

Задание 13

Найдите эффективную годовую ставку сложных процентов, эквивалентную номинальной сложной процентной ставке 18 % годовых ежемесячно.

Варианты ответов:

а) 18,07   б) 18,50   в) 19,56   г) 21,07

Задание 14

Эффективная процентная ставка – …

Варианты ответов:

а) это годовая процентная ставка, которая обеспечивает такой же процентный доход, как и номинальная ставка при ее начислении m раз в году;

б) это годовая процентная ставка, которая обеспечивает такой же процентный доход, как и сложная процентная ставка при ее начислении за весь срок финансовой операции;

в) это номинальная процентная ставка, которая обеспечивает процентный доход финансовой операции при ее начислении m раз в году;

в) это номинальная процентная ставка, которая обеспечивает процентный доход финансовой операции при ее начислении за весь срок финансовой операции.

Задание 15

Эквивалентная номинальная процентная ставка для сложной процентной ставки имеет вид – ____________________

Задание 16

Аннуитет – это…

Варианты ответов:

а) частный случай потока платежей, когда члены потока только положительные величины;

б) частный случай потока платежей, когда число равных временных интервалов ограничено;

в) частный случай потока платежей, когда члены равны и имеют одинаковую направленность, а периоды ренты одинаковы;

г) частный случай потока платежей, когда периоды ренты одинаковы.

Задание 17

Наращенная величина годовой постоянной обычной ренты определяется по формуле:

Варианты ответов:

а) $S=\frac{(1+i)^n-1}{i}$; в) $S=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$;

б) $S=R\cdot(1+i)^n$; г) $S=R\cdot\frac{(1+j/m)^{n\cdot m}-1}{j/m}$.

Задание 18

Вечная рента – это…

Варианты ответов:

а) рента, подлежащая безусловной выплате;

б) рента с выплатой в начале периода;

в) рента с бесконечным числом членов;

г) рента с неравными членами.

Задание 19

Платежи, поступающие в конце каждого квартала на протяжении 2 лет, образуют регулярный по времени поток, первый член которого равен 500 тыс. руб.;

последующие платежи увеличиваются каждый раз на 25 тыс. руб. Начисление процентов производится раз в год по ставке 6%. Найти наращенную стоимость ренты.

Варианты ответов:

а) 4257,5 тыс. руб.   б) 3789,247 тыс. руб.

в) 3731,33 тыс. руб.   г) 4967,753 тыс. руб.

Задание 20

Изменение величины последовательных платежей происходит…

Варианты ответов:

а) по определенному закону;

б) без видимых закономерностей;

в) как по определенному закону, так и без видимых закономерностей;

г) по закону арифметической и геометрической прогрессий.

Задание 21

Пусть ежемесячный темп инфляции 1,5%, срок 3 месяца. Ожидаемый темп инфляции равен:

Варианты ответов:

а) 4,6%; б) 5,5%; в) 7%. г) >10%

Задание 22

Если номинальная процентная ставка составляет 10%, а темп инфляции определен в 4% в год, то реальная процентная ставка составит…

Варианты ответов:

а) 14%. б) 6%. в) 2,5%. г) - 6%.

Задание 23

Величина $\alpha + i \cdot \alpha$ называется:

Варианты ответов:

а) реальной доходностью; б) множителем наращения;

в) покупательной способностью; г) инфляционной премией.

Задание 24

Возможные варианты для наращения процентов с конверсией денежных средств:

Варианты ответов:

а) СКВ⇒СКВ в) РУБ⇒РУБ

б) СКВ⇒РУБ⇒РУБ⇒СКВ г) РУБ⇒СКВ⇒ РУБ ⇒ СКВ

Задание 25

Доллары были проданы по курсу 28,36 руб./долл., а полученная сумма помещена на депозит по ставке 8 % годовых. Через полгода наращенная сумма была истрачена на покупку долларов по курсу 29,45 руб./долл. Темп инфляции доллара за этот промежуток времени составил 3 %. Определите доходность финансовой операции.

Варианты ответов:

а)	-5,88%;	б)	5,88%;
в)	сохранение капитала	г)	не хватает данных для определения доходности данной операции

Задание 26

Срочная уплата при погашении долгосрочного кредита это…

Варианты ответов:

а) начисленные проценты за кредит;

б) размер, приходящийся на одну выплату, который включает сумму погашения в счет основного долга и проценты по нему;

в) сумма погашения основного долга;

г) прибыль заёмщика.

Задание 27

Кредитная ставка равна 14% с начислением по сложному годовому проценту. Определить период времени, по истечении которого процентные деньги сравняются с величиной вклада.

Варианты ответов:

а)	5 лет	б)	10 лет
в)	всегда будут меньше	г)	имеющаяся информация недостаточна

Задание 28

Предполагается поместить 15 000 рублей на валютный депозит. Срок депозита – три года. Курс продажи на начало срока депозита 35,44 рубля за 1 евро, ожидаемый курс покупки – 36,26 рубля. Процентная ставка вклада – 9 % годовых (проценты сложные). По оценкам экспертов, ожидаемый уровень инфляции рубля за весь период операции составит 8 %. Определить доходность операции и допустимое значение курса евро при безубыточной операции.

Задание 29

Имеются три варианта замены годовой ренты постнумерандо (π_1) с параметрами R=90 тыс. руб., n= 3года, i=10%. При тех же длительностях и ставке процента даты начала и размеры выплат для рассматриваемых рент заданы следующими условиями:

π_2 – рента пренумерандо с платежом R=85;

π_3 – отложенная на один период рента с платежом R=100;

π_4 – отложенная на два периода рента с платежом R=107.

Расположите все ренты в порядке убывания их выгодности для получателя денег.

Задание 30

Начиная с текущего года университет в правилах приема предусмотрел возможность обучения в кредит. Так, для абитуриентов недобравших одного проходного бала, этот кредит равен стоимости пятилетнего обучения на платной основе и составляет 250 000 рублей. Руководство университета, не сомневаясь в кредитоспособности своих выпускников, установило следующие правила займа: кредит выдается на 10 лет по 10% годовых; первые 5 лет, пока студент учится, он ничего не платит, а оставшиеся 5 лет ссуда погашается в конце года равными взносами. Допустим, что заемщик предполагает использовать на эти нужды половину годовой зарплаты, которую он будет получать по окончанию университета. На какой минимальный для себя уровень среднемесячной зарплаты он надеется? При решении можно воспользоваться встроенными финансовыми функциями MS Excel.

Ключ к тестовым задания

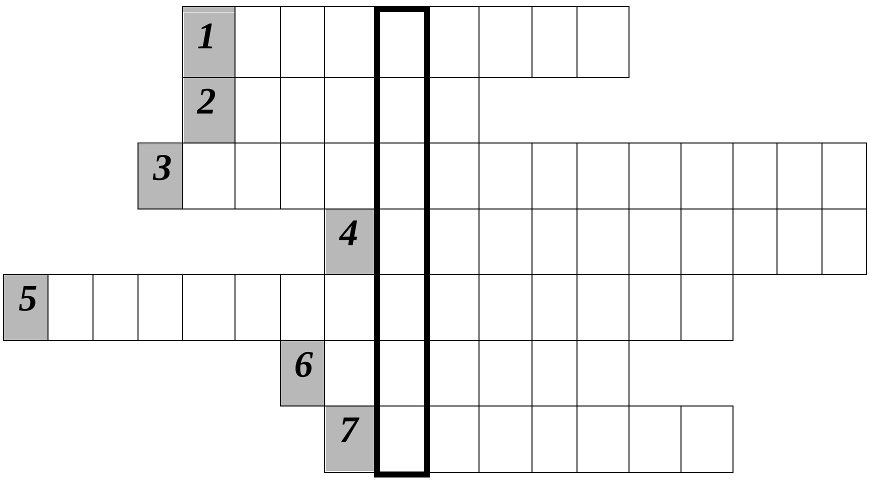
1	в	**11**	в	**21**	а
2	в	**12**	г	**22**	б
3	г	**13**	в	**23**	г
4	в	**14**	а	**24**	б
5	а	**15**	$(\sqrt[m]{1+i_c}-1)m$	**25**	г
6	б	**16**	в	**26**	б
7	а	**17**	в	**27**	а
8	б	**18**	в	**28**	7,15%; предельное значение евро – 39,65 руб. за 1 евро
9	б	**19**	а	**29**	$\pi_2, \pi_3, \pi_1, \pi_4$.
10	в	**20**	в	**30**	17 700 руб.

Приложение 3

ПРОВЕРЬ СЕБЯ: криптограммы

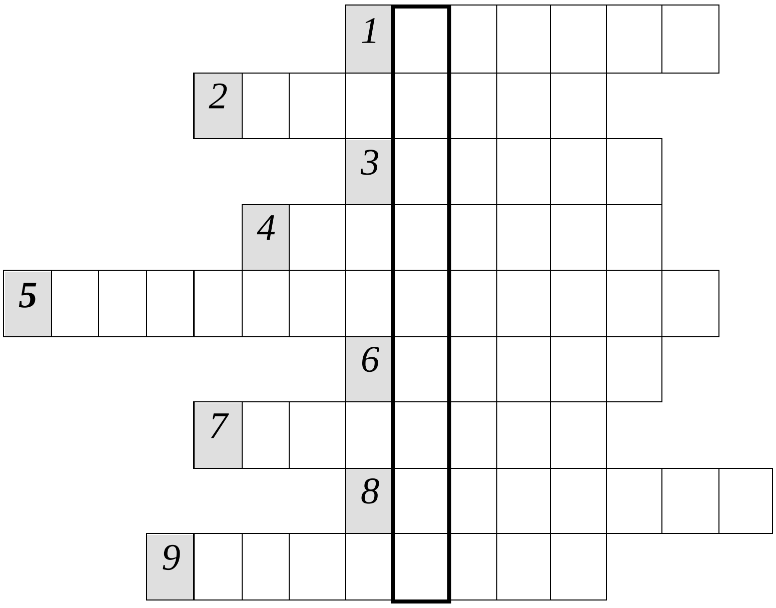
Решение криптограмм состоит в следующем: дается дефиниция (определение, истолкование понятия), и необходимо написать соответствующий этой дефиниции термин – понятие. Правильно отгадав семь слов по горизонтали, вы прочтете в выделенной строке по вертикали зашифрованное слово.

Криптограмма 1. *Простые проценты*



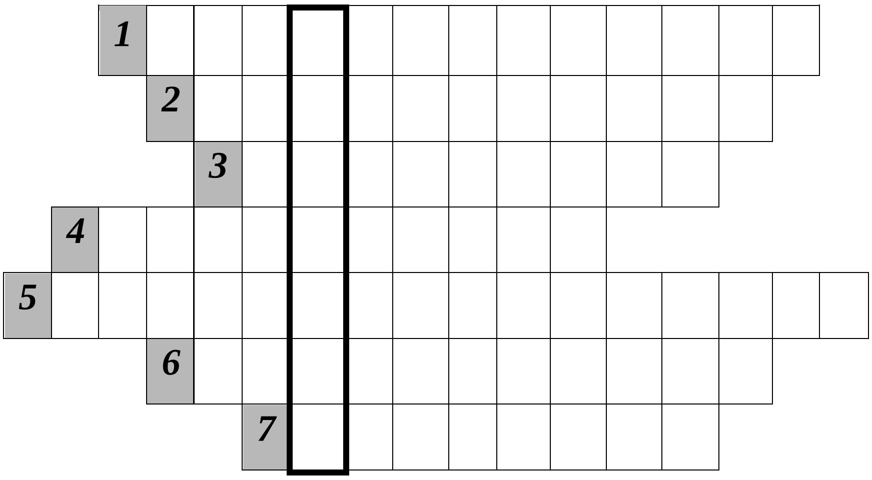
1. Чрезмерное (по отношению к государственному золотому запасу) увеличение количества обращающихся в стране бумажных денег, вызывающих их обесценивание.
2. Установленный обязательный безэквивалентный платеж, не имеющий конкретного направления в использовании, взимаемый с граждан и юридических лиц.
3. По правилу какой прогрессии происходит наращение суммы по простой процентной ставке?
4. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды. Этот метод иногда называют …
5. Если проценты за кредит или любую другую инвестицию выплачиваются в момент заключения договора, то такой метод называют …
6. Ссуда, предоставление ценностей (денег, товара) в долг.
7. Величина, показывающая величину удержанных процентов, начисленных за время n от дня дисконтирования до дня погашения векселя на сумму S, подлежащую уплате в конце срока.

Криптограмма 2. *Финансовая математика*



1. Финансовая операция. Предоставление денег или товар в долг, как правило с уплатой процентов.
2. Материальная ценность, вносимая в государственное учреждение и подлежащая возврату внесшему ее лицу при наступлении определенных условий.
3. Установленный обязательный безэквивалентный платеж, не имеющий конкретного направления в использовании, взимаемый с граждан и юридических лиц.
4. Численно равен такому количеству денежных единиц, с которого при данной процентной ставке получается 1 денежная единица дохода в день.
5. Вид ренты, когда все платежи осуществляются в конце временных интервалов, а проценты начисляются по декурсивному методу.
6. Однонаправленный денежный поток с равными временными интервалами.
7. Это особый вид обязательства, дающий право его владельцу требовать в установленный срок определенную сумму, называемую суммой погашения.
8. Одна из форм залога, при которой закладываемое недвижимое имущество остается в собственности должника, а кредитор в случае невыполнения последним своего обязательства приобретает право получить удовлетворение за счет реализации данного имущества.
9. Процесс, характеризующийся повышением общего уровня цен в экономике и снижением покупательной способности денег.

Криптограмма 3. *Сложные проценты*



1. Если при одинаковой первоначальной сумме P и на одинаковом сроке начисления n две ставки приводят к одинаковой наращенной сумме S, то они …
2. Если количество периодов наращения стремится к бесконечности, а временной интервал между периодами – к нулю, то происходит … наращение процентов.
3. Операция по обмену валют.
4. Обычно проценты при вычислениях записываются в виде … дроби.
5. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая послужила базой для их начисления, часто называют … процентов.
6. Метод начисления процентов, при котором проценты начисляются в конце каждого расчетного периода.
7. Поток положительных платежей с равными интервалами между последовательными платежами в течение определенного срока называется …

Ответы:
Криптограмма 1. *Простые проценты* – ломбард
Криптограмма 2. *Финансовая математика* – конверсия.
Криптограмма 3. *Сложные проценты* – ипотека

Самостоятельная творческая работа

1. Составьте криптограмму по одной из изученных тем, с учетом того, что зашифрованное слово должно относиться к данной теме.
2. Составьте криптограмму по всему курсу финансовой математике.

3. Составьте кроссворд по курсу финансовой математике.

Приложение 4.

Порядковые номера дней в году

День месяца	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Приложение 5

СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ (ГЛОССАРИЙ)

Английская практика (точные проценты с точным числом дней ссуды) – метод процентных расчетов, при котором продолжительность года принимается равными 365 или 366 дней, а число дней между датами получения и погашения кредита рассчитывается точно по календарю.

Аннуитет (финансовая рента) – однонаправленный денежный поток с равными временными интервалами.).

Антисипативный метод начисления процентов – когда проценты, например, за кредит или любую другую инвестицию выплачиваются в момент заключения договора сроком на 1 год, то есть предварительно.

Банковское дисконтирование – основано на использование учетной ставки, т.е. проценты за пользование ссудой начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока ссуды.

Будущая стоимость – стоимость в некоторый момент времени, рассматриваемая с позиции будущего, при условии ее наращения по некоторой ставке.

Валюта – (а) денежная единица страны; (б) средства ни счетах, бумажные деньги, монеты, векселя, чеки, используемые в международных расчетах.

Валюта свободно конвертируемая — валюта, без ограничений обмениваемая на любую другую иностранную им валюту и свободно переводимая в любые другие страны.

Вексель – особый вид письменного обязательства, дающий право его владельцу требовать в установленный срок называемый сроком погашения выплатить определенную сумму, называемую суммой погашения.

Вклады – вид банковских депозитных операций (срочные, до востребования и др.)

Германская практика (обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды) — метод процентных расчетов, при котором срок ссуды, не равный целому числу лет, определяется в неполном году количеством месяцев по 30 дней в каждом, начиная с момента выдачи ссуды и до момента ее погашения, и точным числом дней ссуды в неполном месяце; продолжительность года принимается равным 360 дням.

Декурсивный метод начисления процентов – когда начисление процентов производится в конце расчетного периода.

Депозит – (а) материальная ценность (обычно деньги или ценные бумаги), вносимая в государственное учреждение (банк, сберегательная касса, нотариальная контора и др.) и подлежащая возврату внесшему ее лицу (или кому-либо по его указанию) при наступлении определенных условий; (б) вклады в банках и сберегательных кассах.

Девальвация (лат. de – понижение; лат. valeo иметь значение, стоить) – уменьшение золотого содержания денежной единицы в условиях золотого стандарта. В современных условиях термин применяется для ситуаций официального снижения курса национальной валюты по отношению к твёрдым валютам в системах с фиксированным курсом валюты, устанавливаемым денежными властями.

Дефляция – процесс, характеризующийся снижением общего уровня цен в экономике.

Дивизор (процентный ключ, постоянный делитель) – отношение принятого числа дней в году к процентной ставке; численно равен такому количеству денежных единиц, с которого при данной процентной ставке получается 1 денежная единица дохода в день.

Дисконт – (а) доход, полученный по учетной ставке; (б) процент, взимаемый банком при учете векселей; (в) собственно учетная ставка; (г) скидка (например, с цены товара, с конечной суммы долга и т.п.)

Дисконтирование – процесс, обратный наращению, в котором заданы ожидаемая в будущем к получению (возвращаемая) сумма и ставка.

Дисконтирование банковское – дисконтирование, осуществляемое по учетной ставке.

Дисконтирование математическое – дисконтирование, осуществляемое по процентной ставке.

Индекс – относительная величина, характеризующая соотношение двух значений показателя, описывающего одно и то же явление.

Индекс цен – отношение стоимости определенного набора товаров и услуг в данный период к стоимости того же набора и некотором базовом периоде.

Индекс покупательной способности денег – величина обратная индексу цен.

Индекс потребительских цен – отношение стоимости потребительской корзины в данный период времени к стоимости той же корзины в некотором базовом периоде.

Инфляция – процесс, характеризующийся повышением общего уровня цен в экономике или, что эквивалентно, снижением покупательной способности денег.

Инфляционное таргетирование – комплекс мер, принимаемых государственными органами власти в целях контроля над уровнем инфляции в стране.

Заем – в гражданском праве договор, по которому одна сторона (займодавец) передает другой стороне (заемщику) в собственность или оперативное управление деньги или вещи, определенные родовыми признаками – числом, весом, мерой, а заемщик обязан возвратить займодавцу такую же сумму денег или равное количество вещей того же рода и качества.

Капитализация процентов – систематическое присоединение начисленных процентов к сумме, которая послужила базой для их начисления.

Конверсия валюты – обмен одной валюты на другую по действующему валютному курсу.

Конвертация – свободный процесс обмена одного вида валюты на другую.

Кредит – финансовая операция, предоставления денег или товаров в долг, как правило, с уплатой процентов.

Курс валюты – цена, по которой одна валюта обменивается на другую.

Кросс-курс – это соотношение стоимости двух валют, определяемое на основе их курсов относительно третьей валюты

Наращение – процесс увеличения суммы первоначального капитала за счет присоединения начисленных процентов.

Наращенная сумма – сумма первоначального капитала и начисленных на него процентов; получается в результате осуществления процесса наращения.

Наращенная сумма ренты – сумма всех членов потока платежей с начисленными на них процентами на конец срока ренты, т.е. на дату последней выплаты.

Непрерывные проценты – начисление процентов на сумму, выданную (полученную) в кредит, или дисконтирование наращенных сумм, производимых с частотой, при которой их можно рассматривать как непрерывные.

Номинальная процентная ставка – предусмотренная кредитным соглашением годовая процентная ставка при начислении процентов несколько раз в году.

Отложенная рента – рента, срок реализации которой откладывается на время, указанное в контракте.

Переменная рента – поток последовательных платежей, члены которого не являются постоянными величинами.

Период ренты – временной интервал между двумя рентными платежами.

Потребительский кредит – кредит, который предоставляет банк, финансовая компания или розничный торговец отдельному индивидууму на потребительские цели.

Приведенная стоимость – величина, найденная в результате процесса дисконтирования. Оценивает величину, ожидаемую к получению в будущем, с позиции момента, к которому осуществляется приведение (дисконтирование).

Приведенная стоимость денежного потока – сумма всех дисконтированных элементов этого потока.

Пролонгация (от лат. prolongare – удлинять) – продление срока действия какого-либо процесса.

Процент (процентные деньги) – величина дохода от предоставления в долг некоторой денежной суммы.

Процентная ставка – величина, характеризующая доходность кредитной сделки. Она показывает, какая доля от суммы выданного кредита будет возвращена владельцу капитала в виде дохода.

Процентное число – произведение величины капитала на продолжительность финансовой операции (в днях).

Процентный ключ *{дивизор)* – знаменатель показателя, используемого для вычисления процентного дохода, равен отношению: 36 000/ процентная ставка или 36 500/ процентная ставка.

Проценты обыкновенные – проценты, определяемые исходя из приближенного числа дней в году, квартале и месяце (соответственно 360, 90, 30).

Проценты простые – начисление процентов в течение всего срока кредита на одну и ту же величину капитала, предоставленного в кредит.

Проценты сложные – начисление процентов, при котором начисленные проценты на первоначальную сумму складываются с этой суммой, а в последующих периодах проценты начисляются на уже наращенную сумму. При использовании данного метода база для начисления процентов постоянно меняется.

Проценты точные – проценты, определяемые исходя из точного числа дней в году (365 или 366), в квартале (от 89 до 92), в месяце (от 28 до 31).

Реинвестирование – вложения доходов в некоторый проект производственного или финансового характера с намерением получить на них в дальнейшем дополнительный доход.

Репатриация – репатриация капиталов, вложенных за рубежом, для инвестиций внутри страны.

Реструктуризация кредита – действия кредитора по изменению условий погашения кредита.

Рента постнумерандо – рента, в которой платежи производятся в конце соответствующих периодов (года, полугодия, квартала и т.д.).

Рента пренумерандо – рента, в которой платежи производятся в начале соответствующих периодов (года, полугодия, квартала и т.д.).

Рефинансирование – привлечение кредитными организациями дешёвых краткосрочных межбанковских ссуд или кредитов центрального банка для обеспечения выданных банком кредитов.

Сила роста – относительный прирост наращенной суммы к наращенной сумме в бесконечно малом промежутке времени.

Смешанные ренты – метод начисления процентных платежей в финансовых рентах, совмещающий начисление процентов за целые годовые периоды по ставке сложных процентов, а на платежи, вносимые в течение года, — по ставке простых процентов.

Срок ренты – время от начала реализации ренты до момента начисления последнего платежа.

Срочная уплата – денежная сумма, предназначенная для погашения части основного долга и текущих процентов по нему за определенный период времени.

Ставка – отношение процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к некоторому базовому капиталу, выраженное в десятичных дробях или в процентах.

Ставка дисконтирования – ставка, используемая для расчета приведенной стоимости. В качестве ставки дисконтирования может использоваться как учетная, так и процентная ставка.

Ставка инвестирования (инвестиционная доходность) – ставка процентная, характеризующая эффективность инвестирования, т.е. отдачу на вложенный капитал.

Ставка наращения – ставка, используемая для расчета будущей стоимости. В качестве ставки наращения может использоваться как учетная, так и процентная ставка.

Ставка процентная – отношение процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год) величине исходного капитала.

Ставка процентная номинальная – исходная базовая (как правило, годовая) процентная ставка, указываемая в договорах. Доходность, выражаемая этой ставкой, не скорректирована на инфляцию.

Ставка процентная плавающая – процентная ставка, величина которой пересматривается в течение времени начисления процентов.

Ставка процентная положительная – любая ставка, при которой будет происходить реальное увеличение стоимости капитала при данном индексе инфляции.

Ставка процентная реальная процентная ставка, исчисляемая в условиях элиминирования влияния инфляции. Реальная процентная ставка всегда меньше номинальной за счет негативного влияния инфляции.

Ставка эффективная – годовая ставка сложных процентов, обеспечивающая тот же финансовый результат, что и начисление процентов несколько раз в год по номинальной ставке, деленной на число периодов начисления.

Ставки эквивалентные – ставки, приводящие к одному финансовому результату при едином первоначальном капитале и сроке инвестирования.

Учетная ставка – ставка, используемая при учете векселей, при антисипативном методе начисления процентов и нахождении современной величины, а также как процентная ставка Центрального банка.

Французская практика (обыкновенные проценты с точным числом дней **ссуды) –** метод процентных расчетов, при котором продолжительность года принимается равной 360 дням, а число дней между датами получения и погашения кредита рассчитывается как разность календарных дней.

Чистый приведенный доход (эффект) – текущая (дисконтированная) стоимость денежных притоков за вычетом текущей стоимости денежных оттоков.

Член ренты – величина отдельного рентного платежа.

Эквивалентная процентная ставка – см. *ставки эквивалентные.*

Эффективная процентная ставка – см. *ставка эффективная.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Быстров А.И. Практикум по финансовой математике [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов финансово-экономических специальностей / А.И. Быстров. – Электрон. текстовые данные. – Уфа: Башкирский институт социальных технологий (филиал) ОУП ВО «АТиСО», 2013. — 104 c. Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/66762.html
2. Вахрушева Н.В. Финансовые вычисления. Учебное пособие / Н.В. Вахрушева – Краснодар, 2008. – 132 с.
3. Капитоненко В.В. Задачи и тесты по финансовой математике: учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2007. 256 с.
4. Касимов, Ю.Ф. Финансовая математика [Текст] : учеб. для бакалавров / Ю. Ф. Касимов. - 4-е изд. испр. и доп. - М. : Юрайт, 2012. - 335 с.
5. Ковалев В.В., Уланов В.А. Курс финансовых вычислений. – М.: Финансы и статистика, 1999. 328 с.
6. Копнова Е.Д. Основы финансовой математики [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Копнова Е.Д. – Электрон. текстовые данные. – М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2012.– 232 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/17035.
7. Кузнецов, Б.Т. Математические методы финансового анализа: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальностям 061800 «Математические методы в экономике», 060400 «Финансы и кредит» / Б.Т Кузнецов. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2017. - 159 с. - ISBN 978-5-238-00977-1. - Текст : электронный. - Режим доступа: URL: https://znanium.com/catalog/product/1028520
8. Лётчиков, А. В. Лекции по финансовой математике / А. В. Лётчиков. — Москва, Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2019. — 236 c. Режим доступа: URL: http://www.iprbookshop.ru/91950.html
9. Люу Ю-Дау, Методы и алгоритмы финансовой математики / Люу Ю-Дау , - 3-е изд., (эл.) - Москва :Лаборатория знаний, 2017. - 754 с.: ISBN 978-5-00101-519-2. - Текст : электронный. - Режим доступа: URL: https://znanium.com/catalog/product/548571
10. Малыхин В.И. Финансовая математика [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов / В.И. Малыхин. – 2-е изд. — Электрон. текстовые данные. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2017. – 235 c. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/71239.html
11. Самаров, К.Л. Финансовая математика: сборник задач с решениями [Текст] : учеб. пособие / К. Л. Самаров. - М. : Альфа-М;ИНФРА-М, 2011. -

80 с. Токтошов, Г. Ы. Финансовая математика : учебное пособие / Г. Ы. Токтошов. – Новосибирск : Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2019. –131 с. – Режим доступа URL: http://www.iprbookshop.ru/90603.html

12. Финансовая математика [Текст] : учеб. пособие / П. Н. Брусов, П.П. Брусов, Н.П. Орехова, С.В. Скородулина. - 2-е изд., стер. - М. : КНОРУС, 2013. - 224 с. ; УМО; ФГОС. - (Бакалавриат).
13. Финансовая математика: Математическое моделирование финансовых операций: Учеб. Пособие / Под ред. В.А. Половникова и А.И. Пилипенко. – М.: Вузовский учебник, 2009. – 360 с.
14. Четыркин, Е.М. Финансовая математика [Текст] : учеб. / Е. М. Четыркин. - 10-е изд. - М. : ИД Дело РАНХиГС, 2011. - 392 с
15. Чуйко, А.С. Финансовая математика [Текст] : учеб. пособие / А. С. Чуйко, В.Г. Шершнев. - М. : ИНФРА-М, 2013. - 160 с.
16. Чжун Кай Лай, Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика / Чжун Кай Лай , АитСахлиа Ф., - 3-е изд., (эл.) - Москва :Лаборатория знаний, 2017. - 458 с.: ISBN 978-5-00101-524-6. - Текст : электронный. - Режим доступа: URL: https://znanium.com/catalog/product/477952

Н.В. Вахрушева

Финансовая математика

электронное
учебно-методическое
пособие

Усл. п.л. - 5.1

Кубанский институт социоэкономики и права
(филиал) Образовательного учреждения профсоюзов
высшего образования «Академия труда и социальных отношений»
360062, г. Краснодар, ул. Атарбекова, 42